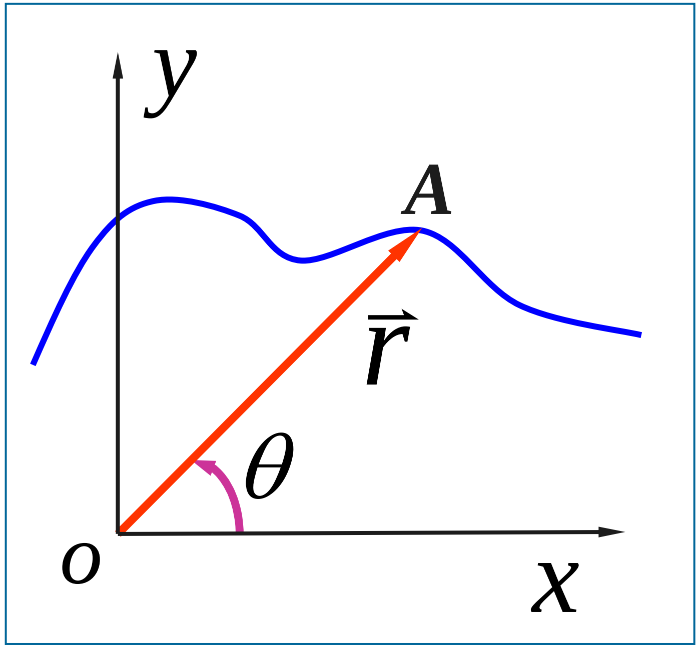
一 平面极坐标

设一质点在 Oxy 平面内运动，某时刻它位于点 A. 矢径 $\vec{r}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ. 于是质点在点 A 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定.



以 (r,θ) 为坐标的参考系为**平面极坐标系**.

它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

二 圆周运动的角速度和角加速度

角坐标 $\theta(t)$

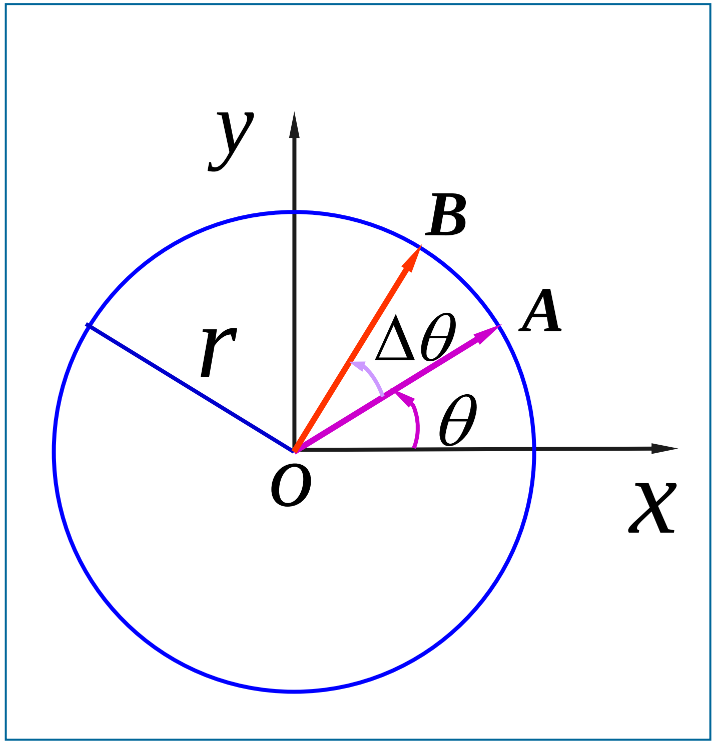
角速度 $\omega(t)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$

速 率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad v(t)=r\omega(t)$$

角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$



三 圆周运动的切向加速度和法向加速度 角加速度

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{t}=v\vec{e}_\mathrm{t}=r\omega\vec{e}_\mathrm{t}$$

质点作变速率圆周运动时

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{t}+v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$$

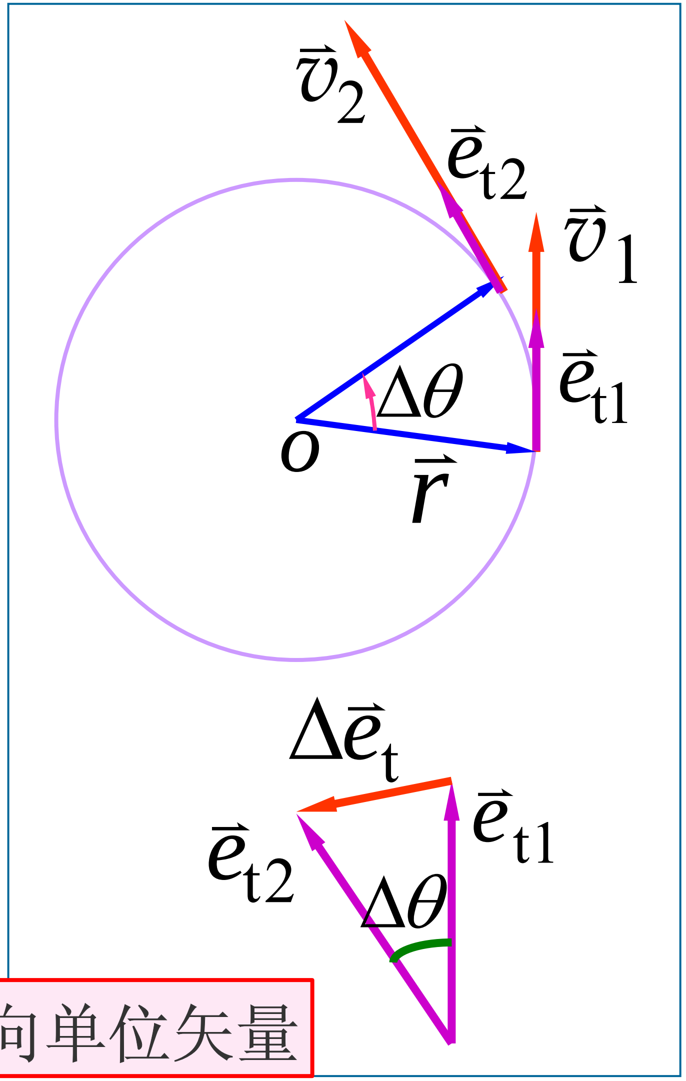
切向加速度

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

切向单位矢量的时间变化率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_\mathrm{t}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n}$$

法向单位矢量



$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\,\omega\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

切向加速度（速度大小变化引起）

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

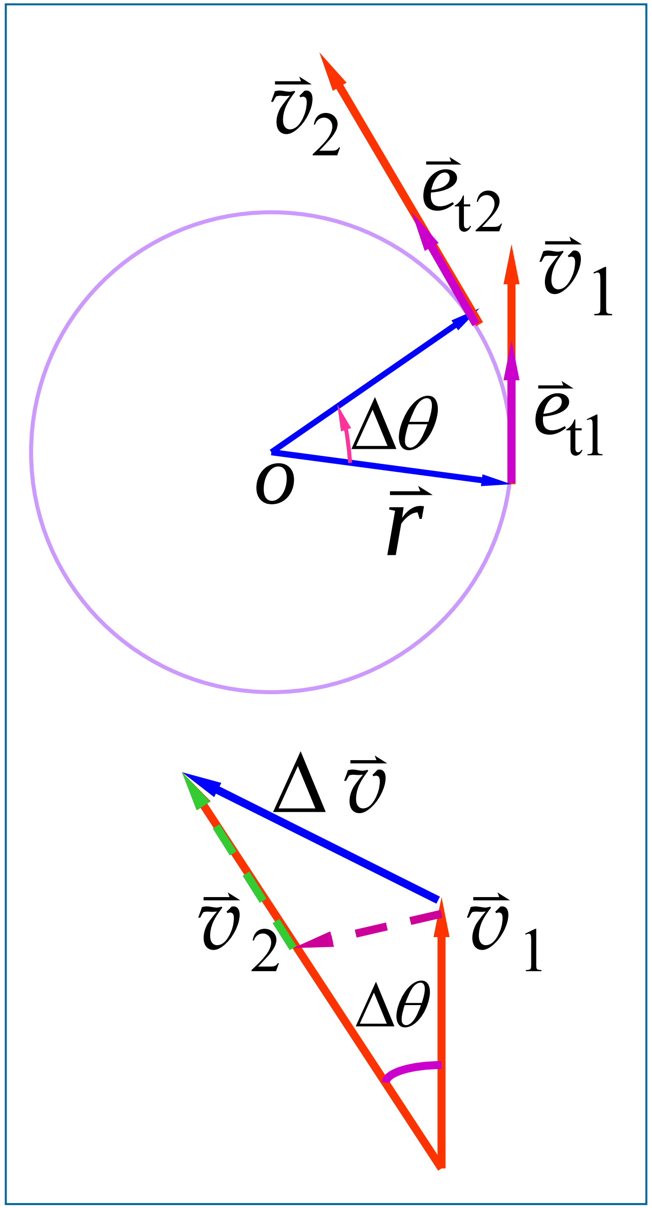
法向加速度（速度方向变化引起）

$$a_{\mathrm{n}}=v\omega=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$$

圆周运动加速度

$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$$



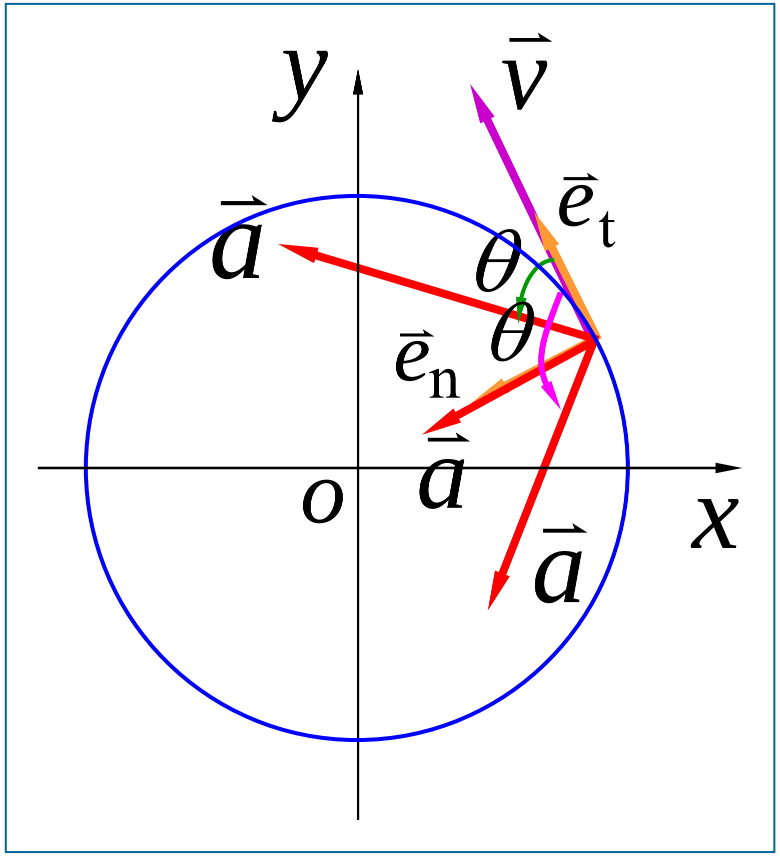
$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$

$$\because a_n > 0 \quad \therefore 0 < \theta < \pi$$

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

$$a_t \begin{cases} >0, \ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}, & v\text{增大} \\ =0, \ \theta=\dfrac{\pi}{2}, & v\equiv\text{常量} \\ <0, \ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi, & v\text{减小} \end{cases}$$



一般曲线运动（自然坐标）

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{t} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$$

其中 $\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 曲率半径.

四 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1 匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量.

$$a_\mathrm{t} = 0 \qquad \vec{a} = a_\mathrm{n}\vec{e}_\mathrm{n} = r\omega^2\vec{e}_\mathrm{n}$$

2 匀变速率圆周运动

$\alpha =$ 常量

如 $t = 0$ 时， $\theta = \theta_0, \omega = \omega_0$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

讨论

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（**A**）切向加速度必不为零；

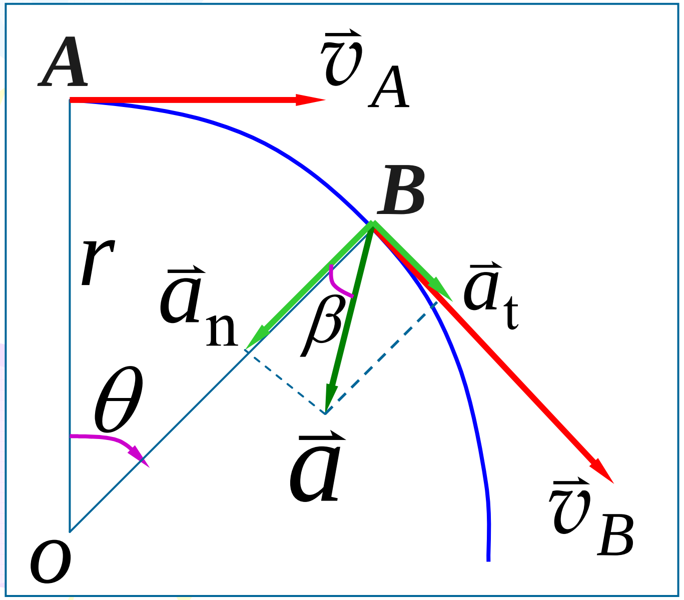
★（**B**）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（**C**）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（**D**）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（**E**）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动．

例 如图一超音速歼击机在高空 ***A*** 时的水平速率为 1940 km/h， 沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 ***B*** ,其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从***A*** 到***B*** 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：**(1)** 飞机在点***B*** 的加速度；**(2)**飞机由点***A*** 到点***B*** 所经历的路程 .



解（**1**）因飞机作匀变速率运动所以 a_t 和 α 为常量 .

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

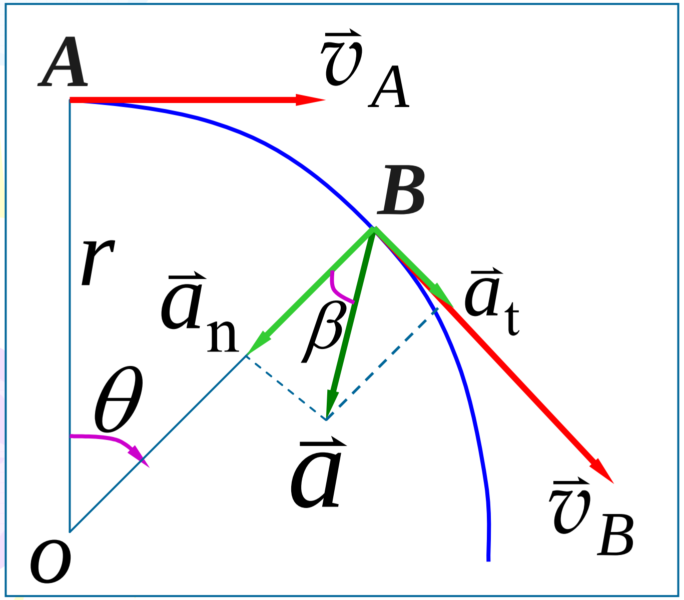
分离变量有 $\displaystyle\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_t \mathrm{d}t$

已知：$v_A = 1940\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $v_B = 2192\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\,\text{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\,\text{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\,\mathrm{d}v = \int_0^t a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}t \qquad a_\mathrm{t} = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

在点 **B** 的法向加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$



在点 **B** 的加速度

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = 109\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 β 为

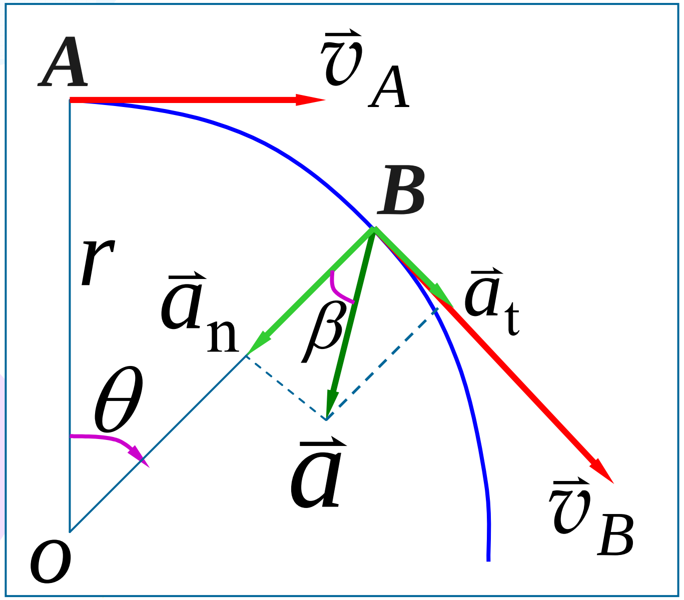
$$\beta = \arctan\frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}} = 12.4^\circ$$

已知： $v_A = 1940\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ $v_B = 2192\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$t = 3\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\mathrm{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\ \mathrm{m}$$