力的累积效应 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(t)\text{对}\,t\ \text{积累} \rightarrow \vec{p}\ ,\ \vec{I} \\ \vec{F}\ \text{对}\,\vec{r}\,\text{积累} \rightarrow W\ ,E \end{array} \right.$

一 冲量 质点的动量定理

- 动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\,(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- 冲量 力对时间的积分（矢量） $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

动量定理 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量.

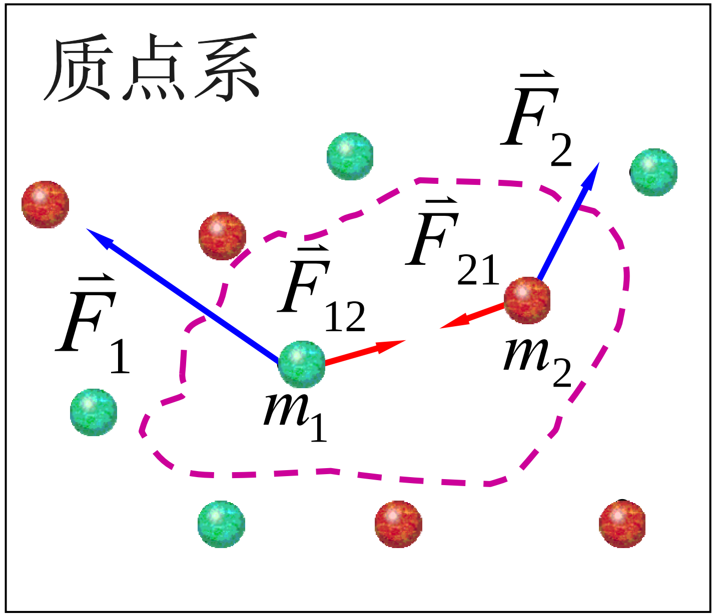
- 分量形式

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} \quad \begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

二　质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$



因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

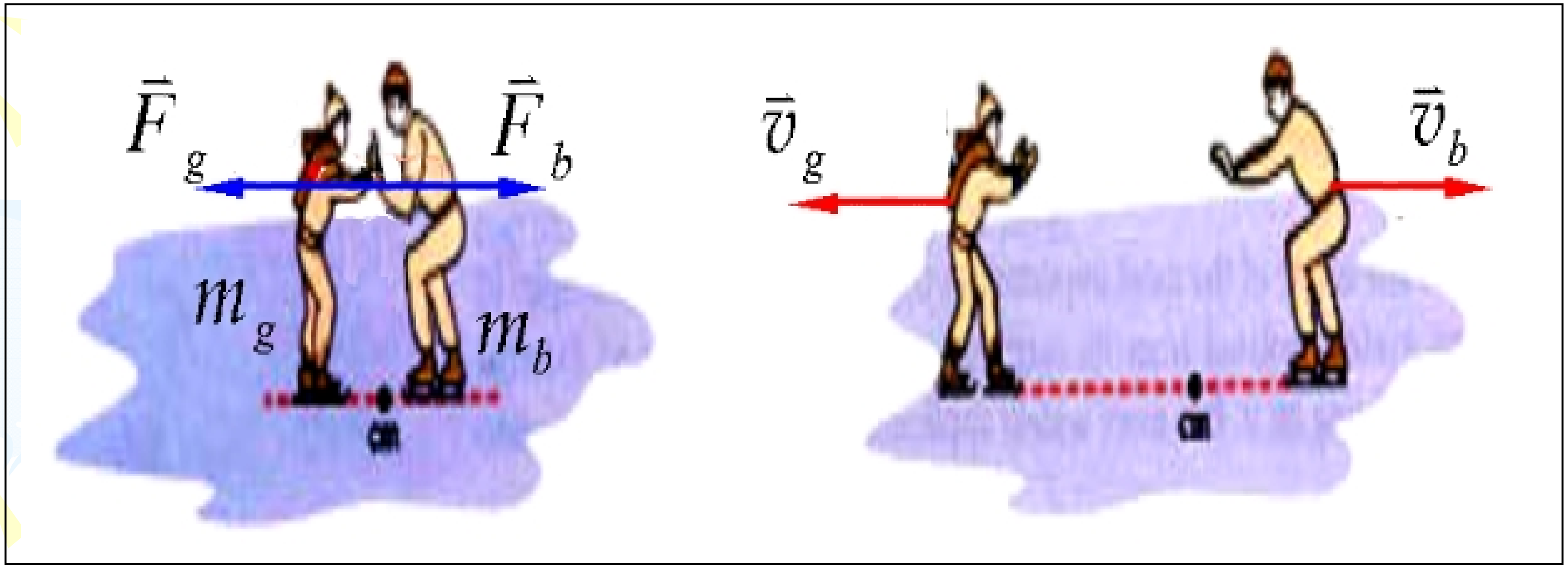
$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

- **质点系动量定理**　作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}}$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0}$$

注意 内力不改变质点系的动量



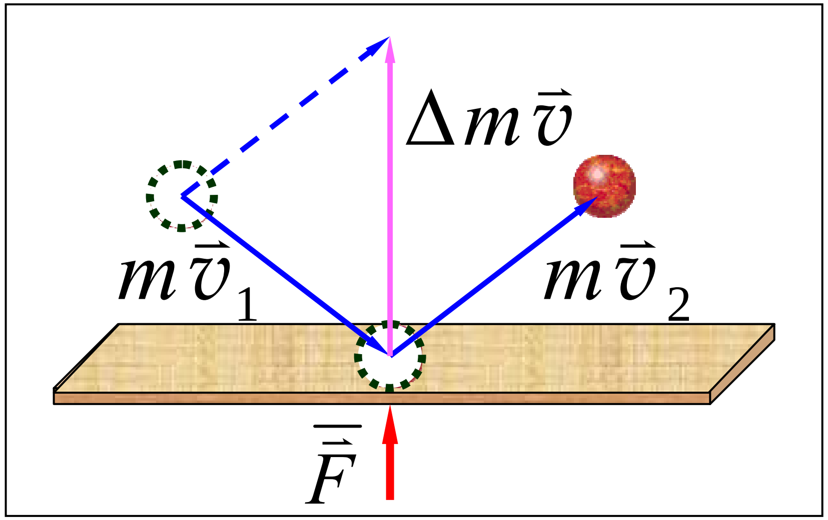
初始速度 $v_{g0}=v_{b0}=0$ $m_b=2m_g$ 则 $\vec{p}_0=0$

推开后速度 $v_g=2v_b$ 且方向相反 则 $\vec{p}=0$

推开前后系统动量不变 $\vec{p}=\vec{p}_0$

动量定理常应用于碰撞问题

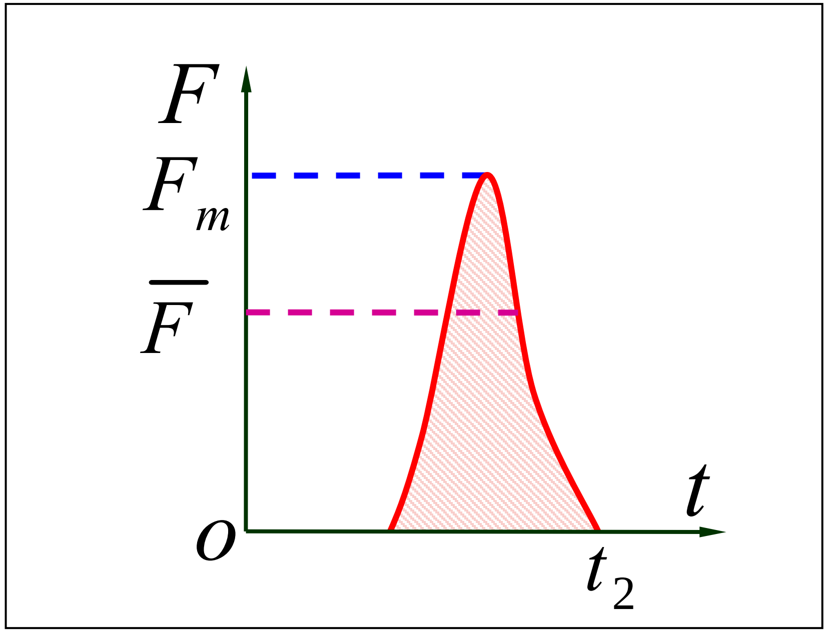
$$\overline{F}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$



注意

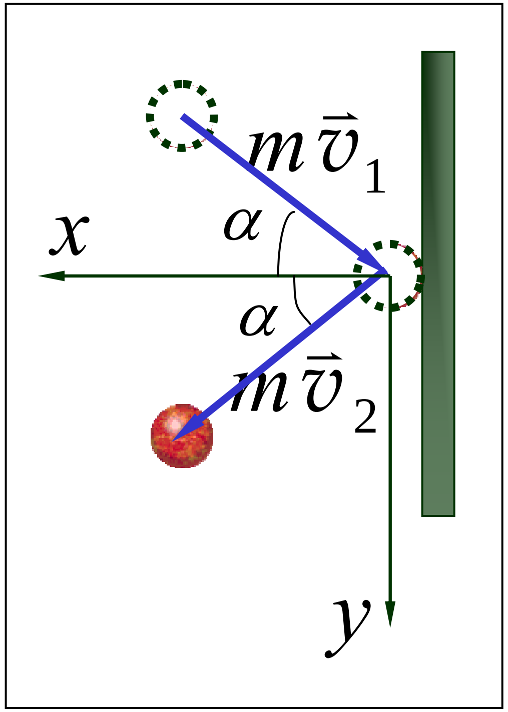
在 $\Delta\vec{p}$ 一定时 Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．

例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．



例 1 一质量为0.05kg、速率为$10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的刚球,以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来 .设碰撞时间为0.05s.求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$.

解 建立如图坐标系, 由动量定理得



$$\overline{F}_x \Delta t = m v_{2x} - m v_{1x}$$

$$= m v \cos\alpha - (-m v \cos\alpha)$$

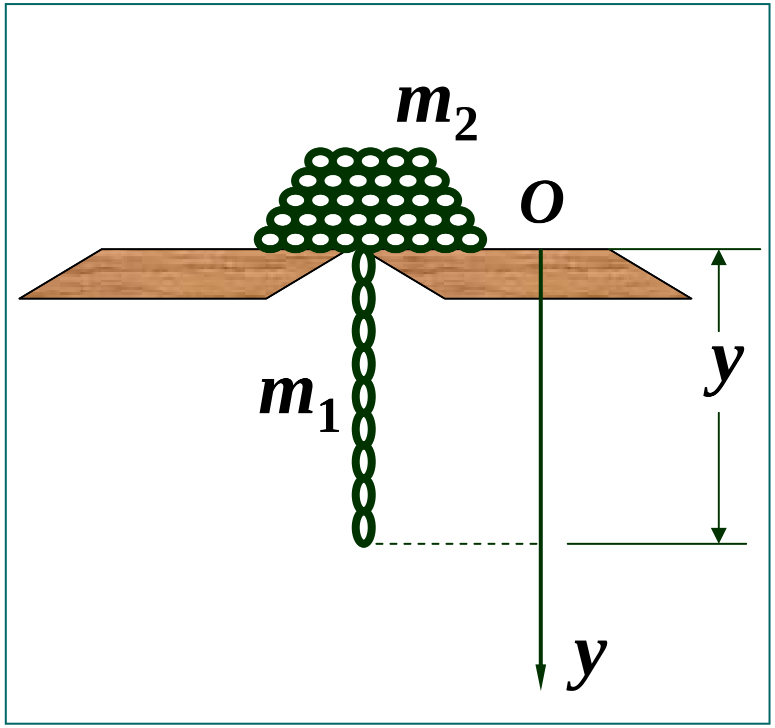
$$= 2 m v \cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = m v_{2y} - m v_{1y}$$

$$= m v \sin\alpha - m v \sin\alpha = 0$$

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2 m v \cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\mathrm{N}$$ 方向沿 x 轴反向

例 2 一柔软链条长为l,单位长度的质量为λ.链条放在桌上,桌上有一小孔,链条一端由小孔稍伸下,其余部分堆在小孔周围.由于某种扰动,链条因自身重量开始落下.求链条下落速度与落下距离之间的关系.设链与各处的摩擦均略去不计,且认为链条软得可以自由伸开.



解 以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统,建立如图坐标

则 $F^{\mathrm{ex}} = m_1 g = \lambda y g$

由质点系动量定理得

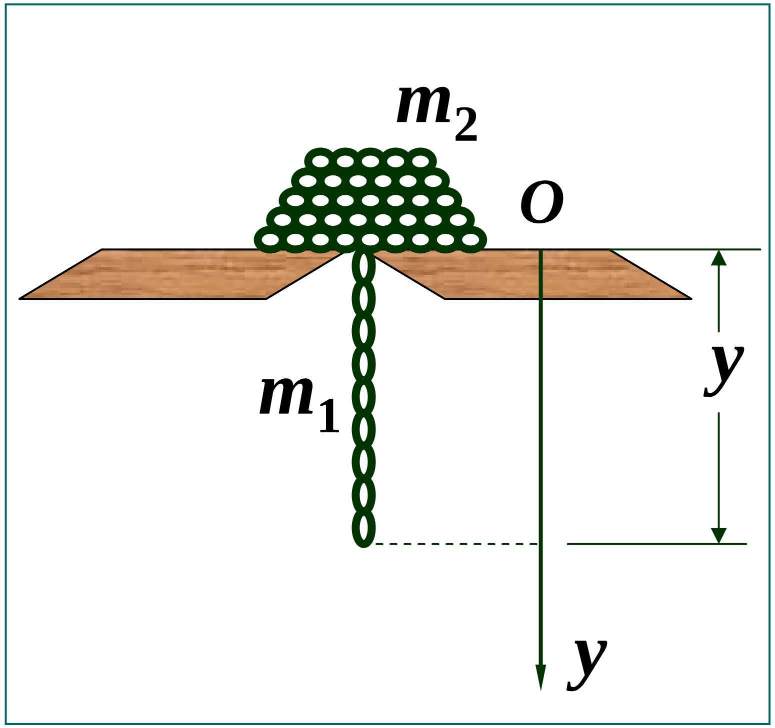
$$F^{\mathrm{ex}} \mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

$$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

又 $$\mathrm{d}p = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\therefore \quad \lambda y g\,\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$$

则 $$yg = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$



两边同乘以 $y\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2$$

$$v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$