力的空间累积效应：$\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 $\longrightarrow$ W，动能定理.

一 功

力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积 .（功是标量，过程量）

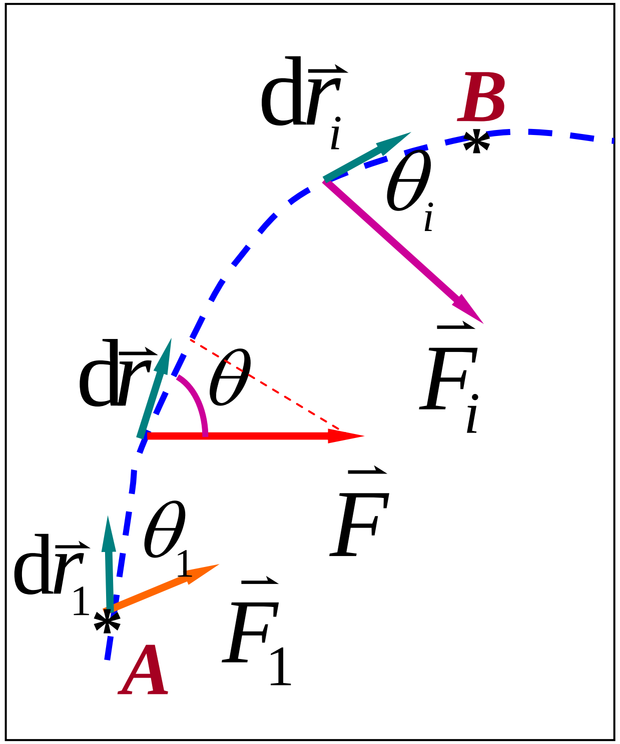
$$\mathrm{d}W = F\cos\theta|\mathrm{d}\vec{r}| = F\cos\theta\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$0° < \theta < 90°,\quad \mathrm{d}W > 0$$

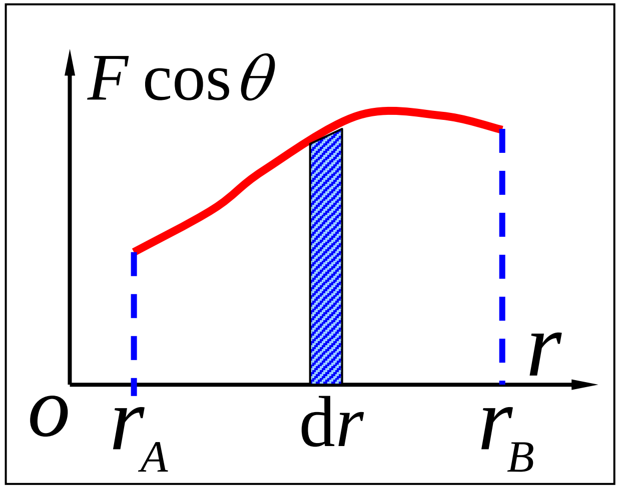
$$90° < \theta < 180°,\quad \mathrm{d}W < 0$$

$$\theta = 90° \quad \vec{F}\perp\mathrm{d}\vec{r} \quad \mathrm{d}W = 0$$



◆ 变力的功 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\mathrm{d}r$$



◆ 合力的功 = 分力的功的代数和

$$W = \int\sum\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i W_i$$

$$\begin{cases}\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\end{cases}$$

$$W = \int F_x\mathrm{d}x + \int F_y\mathrm{d}y + \int F_z\mathrm{d}z$$

$$W = W_x + W_y + W_z$$

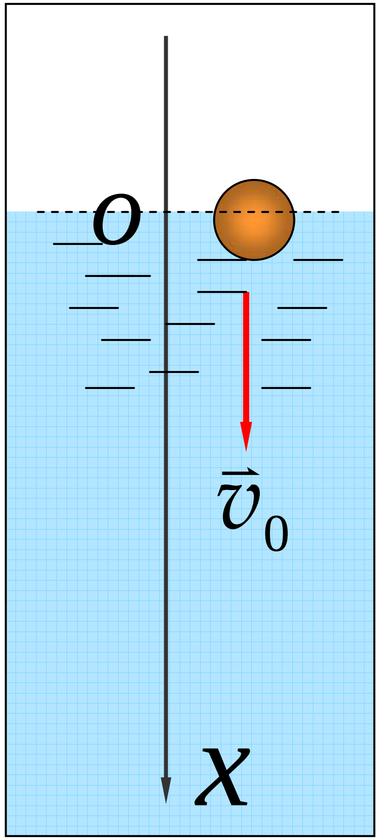
- 功的大小与参照系有关
- 功的量纲和单位 $\dim W = \mathrm{ML^2T^{-2}}$ $\mathrm{1J = 1N \cdot m}$
- 平均功率 $\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$
- 瞬时功率 $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$P = Fv\cos\theta$$

- 功率的单位 （瓦特）$\mathrm{1W = 1J \cdot s^{-1}}$ $\mathrm{1kW = 10^3\,W}$

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0. 设此球在水中所受的浮力与重力相等, 水的阻力为 $F_r = -bv$, b 为一常量. 求阻力对球作的功与时间的函数关系 .

解 如图建立坐标轴



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -bv\,dx = -\int bv\frac{dx}{dt}dt$$

即
$$W = -b\int v^2\,dt$$

又由 **2 - 5** 节例 **5** 知
$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W = -bv_0^2\int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t}dt$$

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2(e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

二 质点的动能定理

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}|\mathrm{d}\vec{r}|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \qquad F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$W=\int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能（状态函数）

$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}}$$

- 动能定理

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量．

$$\boxed{W=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}}$$

注意 功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系．

例 2　一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落．试求绳与竖直线成 10° 角时小球的速率．

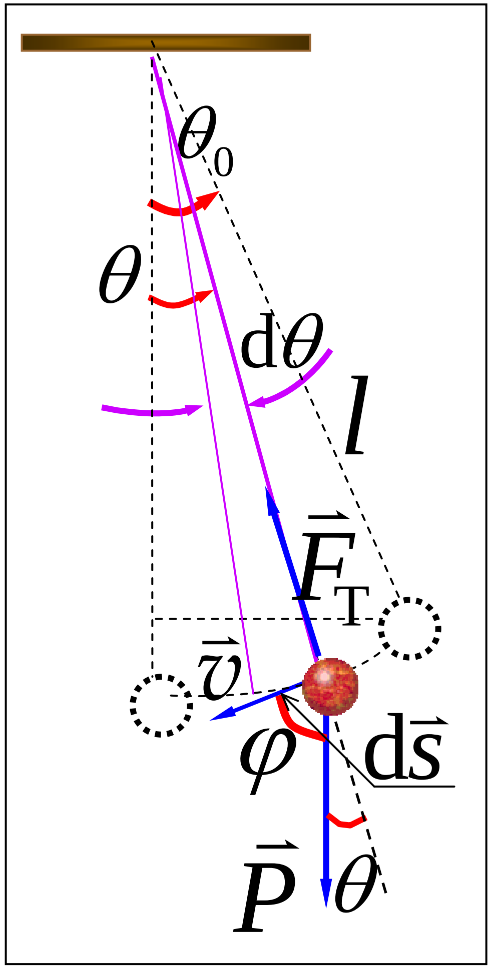
解
$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-mgl\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$=-mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$W=-mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$



$$m = 1.0\text{kg} \qquad l = 1.0\text{m}$$

$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$$= 1.53\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$