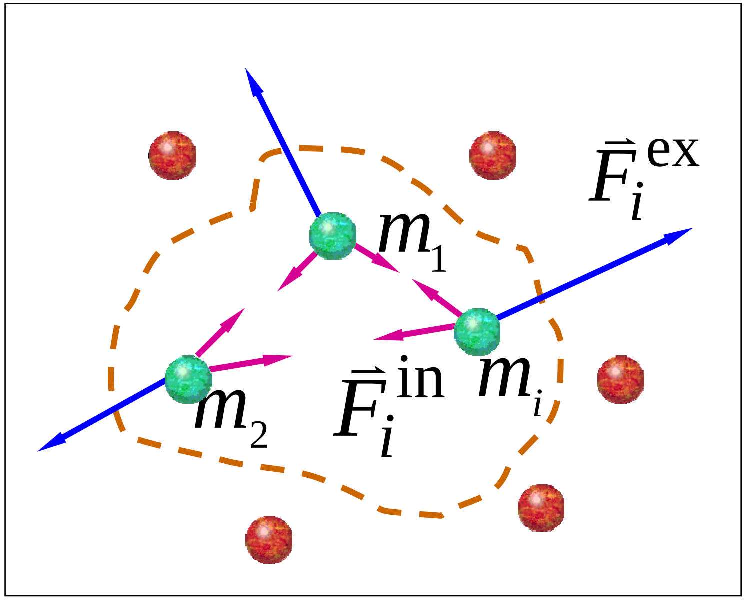
一 质点系的动能定理

◆ 对第 i 个质点，有



$$W_i^{\mathrm{ex}} + W_i^{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k}i} - E_{\mathrm{k}i0}$$

外力功　内力功

对质点系，有

$$\sum_i W_i^{\mathrm{ex}} + \sum_i W_i^{\mathrm{in}} = \sum_i E_{\mathrm{k}i} - \sum_i E_{\mathrm{k}i0} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

◆ 质点系动能定理 $W^{\mathrm{ex}} + W^{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$

注意　内力可以改变质点系的动能

二 质点系的功能原理

质点系动能定理 $W^{\mathrm{ex}} + W^{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}}$

$$W^{\mathrm{in}} = \sum_i W_i^{\mathrm{in}} = W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}} + W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}$$

非保守力的功

$$W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}} = -\left(\sum_i E_{\mathrm{p}i} - \sum_i E_{\mathrm{p}i0}\right) = E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}$$

$$W^{\mathrm{ex}} + W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}} = (E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}) - (E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{p0}})$$

机械能 $E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$ $\boxed{W^{\mathrm{ex}} + W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}} = E - E_0}$

◆ 质点系的功能原理 质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和 .

三 机械能守恒定律

- 功能原理 $W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=(E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}})-(E_{\mathrm{k0}}+E_{\mathrm{p0}})$

当 $W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=0$ 时，有 $E=E_0$

- 机械能守恒定律 只有保守内力作功的情况下，质点系的机械能保持不变．

$$E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k0}}=-(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p0}})$$

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{k}}=-\Delta E_{\mathrm{p}}}$$

- 守恒定律的意义

不究过程细节而能对系统的状态下结论，这是各个守恒定律的特点和优点．

讨论

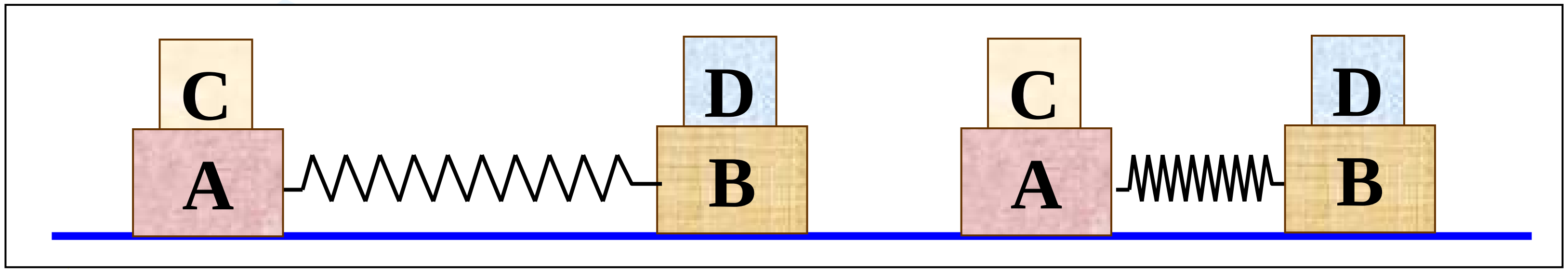
如图的系统，物体 **A**，**B** 置于光滑的桌面上，物体 **A** 和 **C**，**B** 和 **D** 之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压 **A** 和 **B**，使弹簧压缩，后拆除外力，则 **A** 和 **B** 弹开过程中，对 **A**、**B**、**C**、**D** 组成的系统

（**A**）动量守恒，机械能守恒．

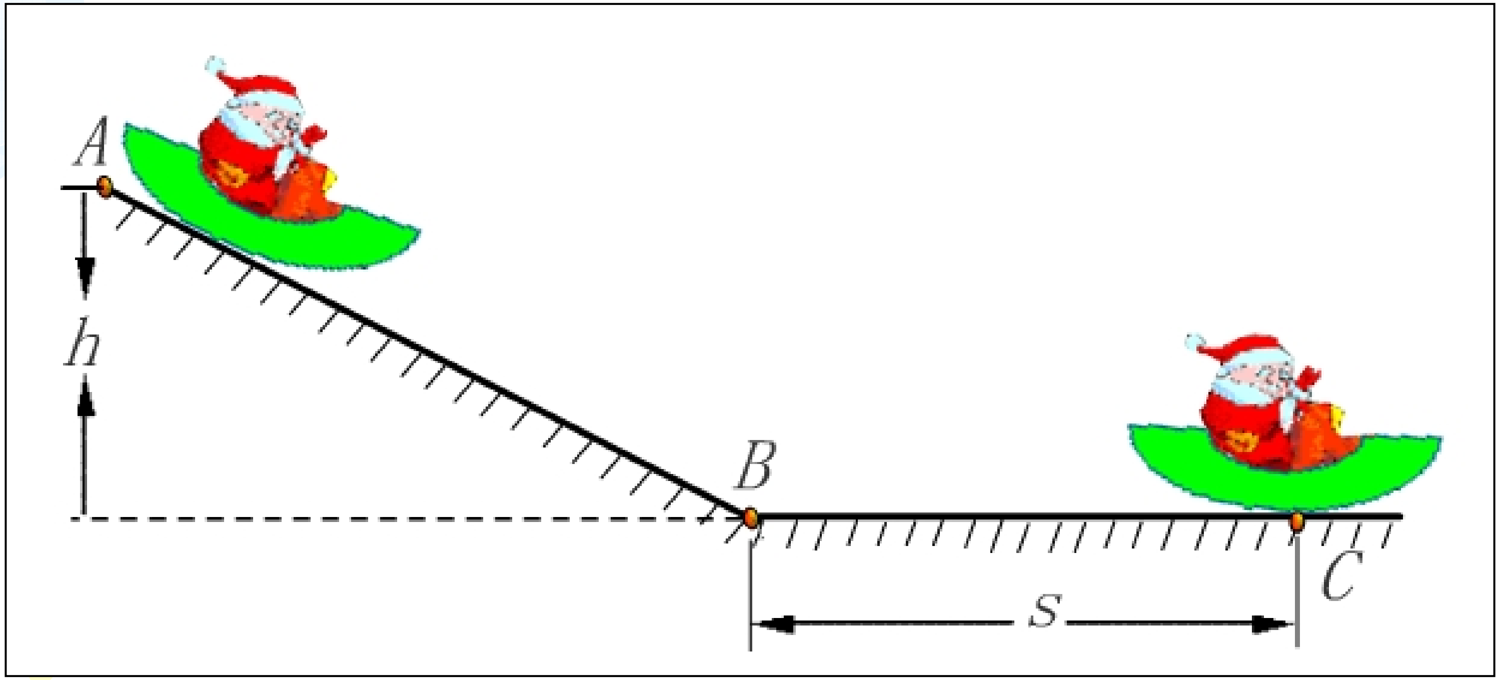
（**B**）动量不守恒，机械能守恒．

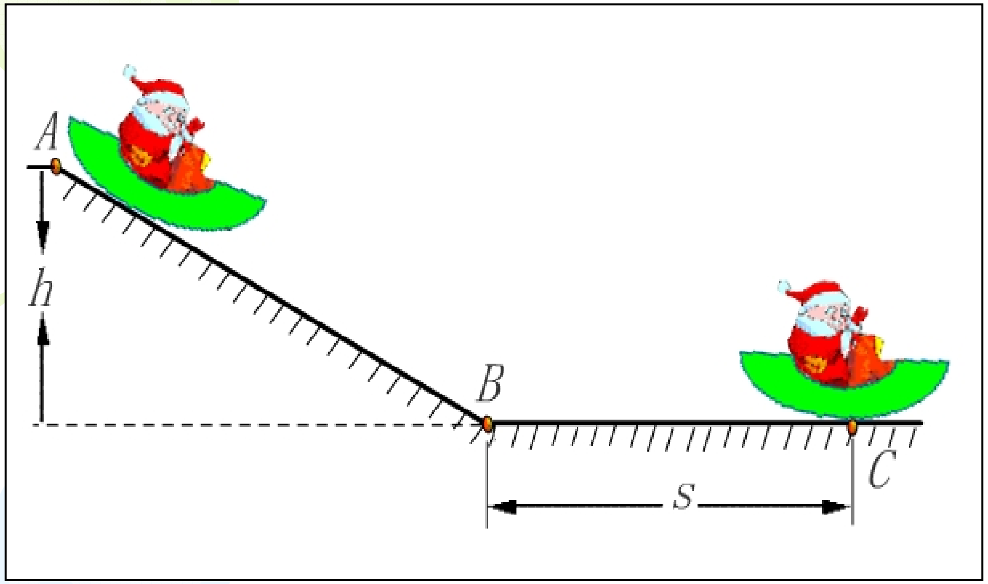
（**C**）动量不守恒，机械能不守恒．

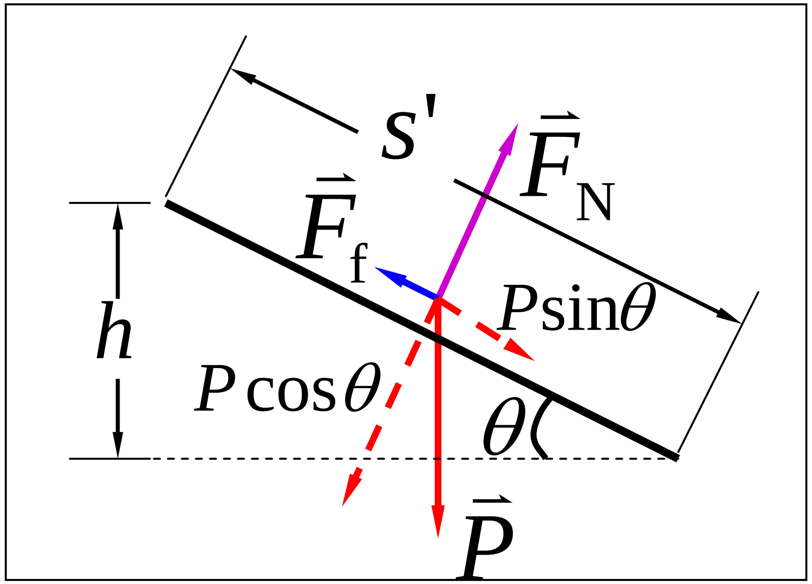
★（**D**）动量守恒，机械能不一定守恒．



例 1 一雪橇从高度为50m 的山顶上点*A*沿冰道由静止下滑,山顶到山下的坡道长为500m . 雪橇滑至山下点*B*后,又沿水平冰道继续滑行,滑行若干米后停止在*C*处 . 若摩擦因数为0.050 . 求此雪橇沿水平冰道滑行的路程 . (点*B*附近可视为连续弯曲的滑道.忽略空气阻力 .)







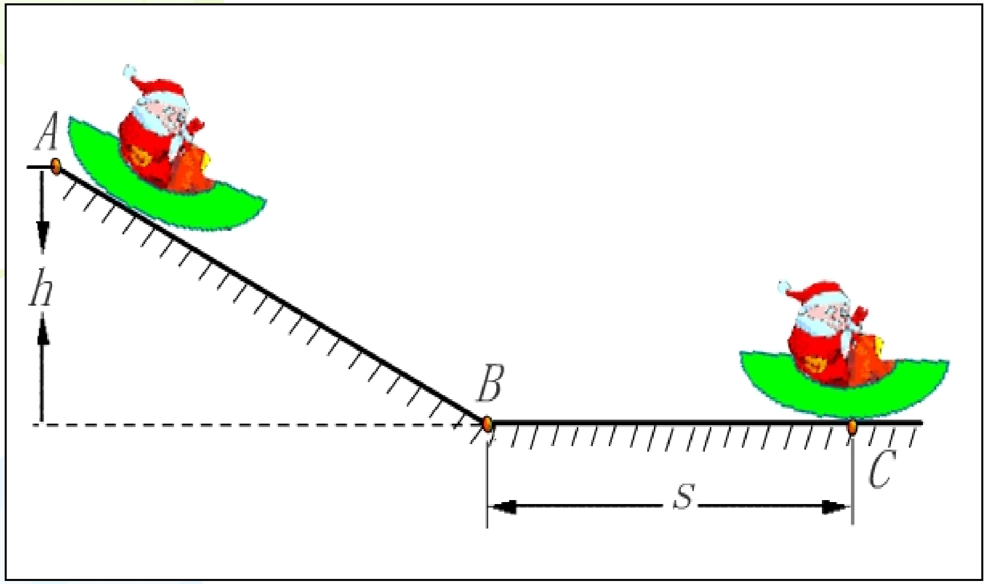
已知 $h = 50\mathrm{m}\,,\ \mu = 0.050\,,\ s' = 500\mathrm{m}\,,$ 求 s .

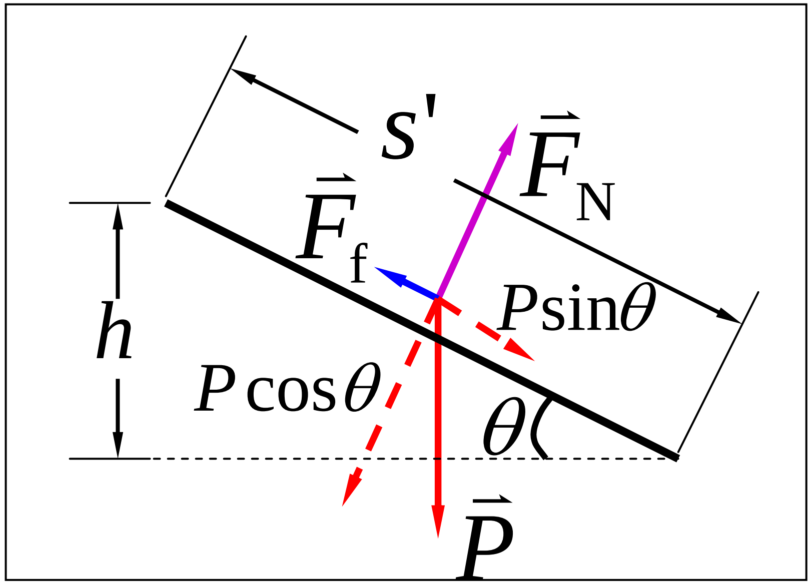
解 以雪橇、冰道和地球为一系统，由功能原理得

$$W_{\mathrm{f}} = E_2 - E_1$$

$\because$ $$W_{\mathrm{f}} = -\mu mg\cos\theta\, s' - \mu mgs \approx -\mu mg(s'+s)$$

又 $$E_2 - E_1 = -mgh$$





$$h = 50\mathrm{m}\,,\ \mu = 0.050\,,\ s' = 500\mathrm{m}\,,\ W_f \approx -\mu mg\,(s'+s)$$

由功能原理 $$W_f = E_2 - E_1$$

可得 $$-\mu mg(s'+s) = -mgh$$

代入已知数据有 $$s = h/\mu - s' = 500\mathrm{m}$$

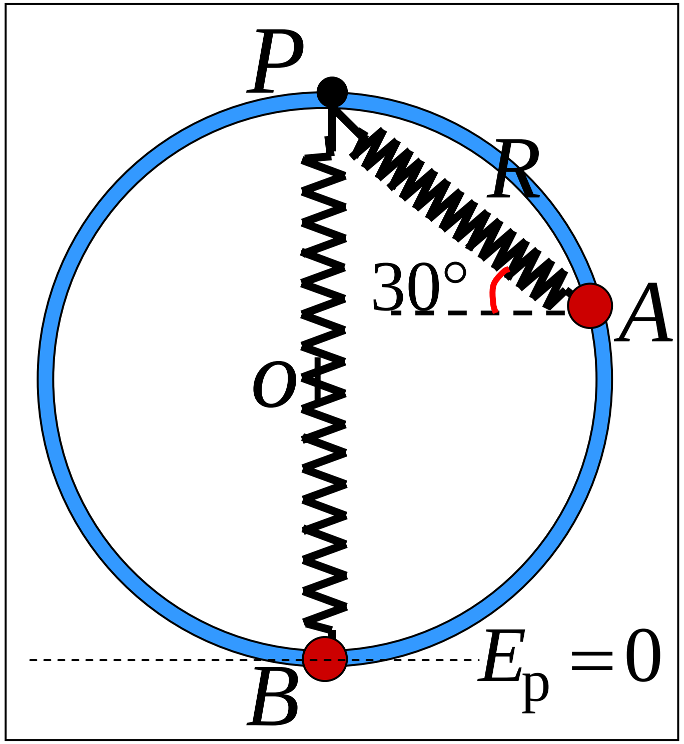
例 2 有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点P，另一端系一质量为m的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦) .开始小球静止于点A，弹簧处于自然状态,其长度为圆环半径R; 当小球运动到圆环的底端点B时,小球对圆环没有压力. 求弹簧的劲度系数.

解 以弹簧、小球和地球为一系统，

$\because A \rightarrow B$ 只有保守内力做功

$\therefore$系统机械能守恒 $E_B = E_A$

取图中点B为重力势能零点

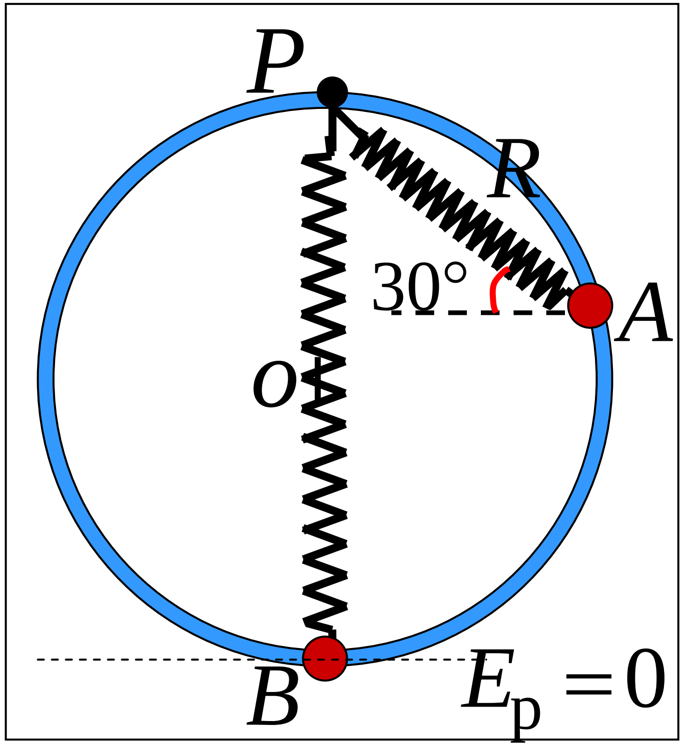


系统机械能守恒 $E_B = E_A$, 图中B点为重力势能零点

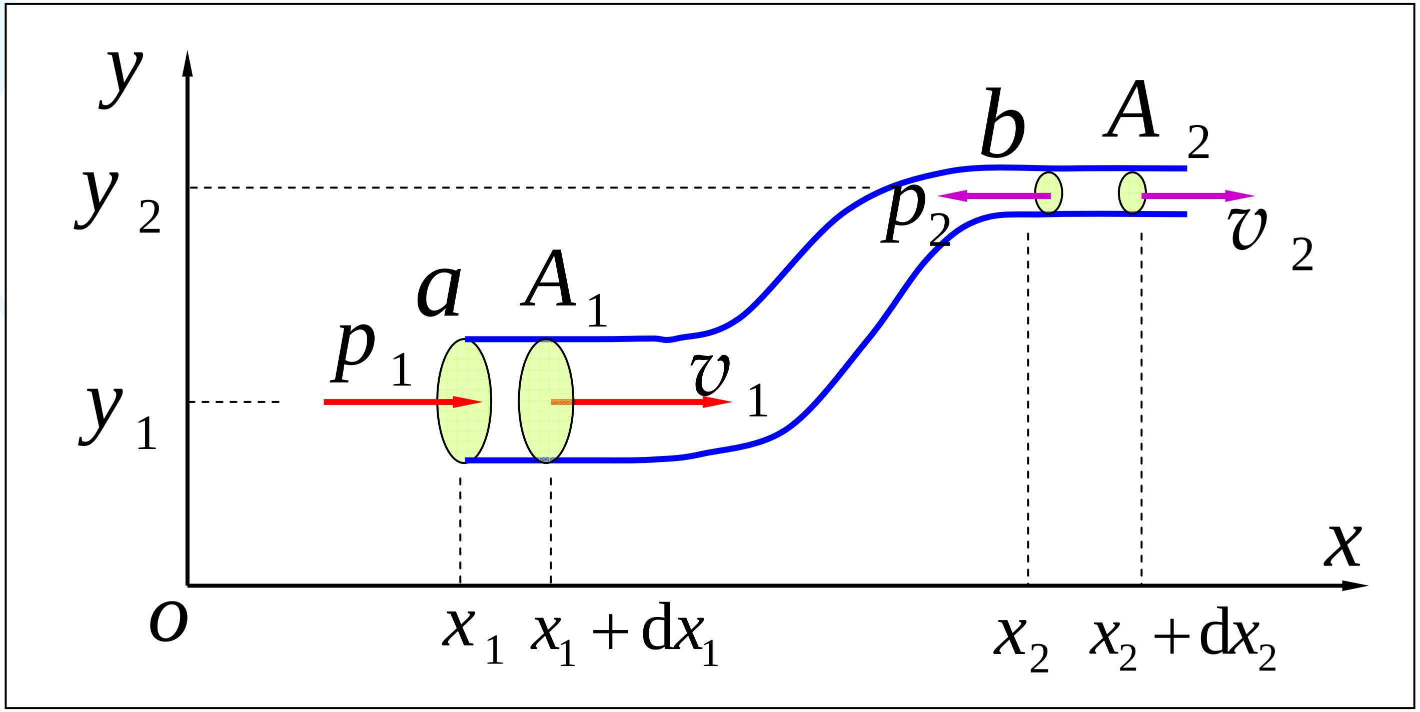
即 $$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2-\sin 30°)$$

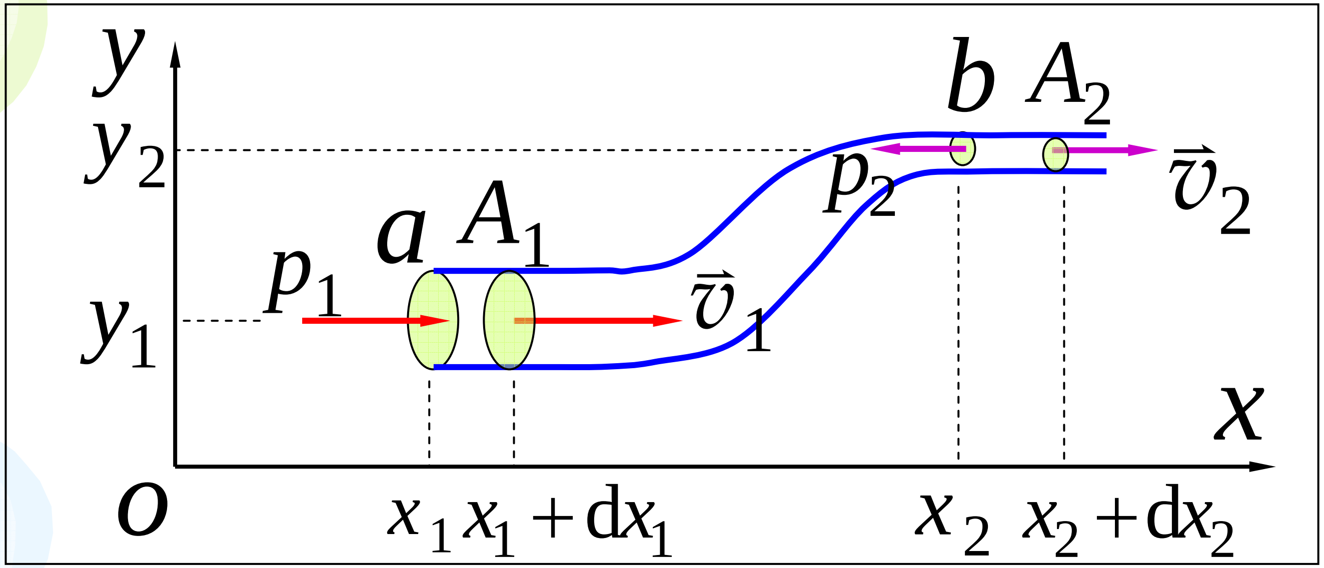
又 $$kR - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

所以 $$k = \frac{2mg}{R}$$



例 3 在一截面积变化的弯曲管中，稳定流动着不可压缩的密度为 ρ 的流体．点 $\boldsymbol{a}$ 处的压强为 $\boldsymbol{p}_1$、截面积为$\boldsymbol{A}_1$,在点$\boldsymbol{b}$ 处的压强为$\boldsymbol{p}_2$ 截面积为$\boldsymbol{A}_2$.由于点 $\boldsymbol{a}$ 和点 $\boldsymbol{b}$ 之间存在压力差，流体将在管中移动．在点 $\boldsymbol{a}$ 和点$\boldsymbol{b}$ 处的速率分别为 v_1和 v_2.求流体的压强和速率之间的关系．



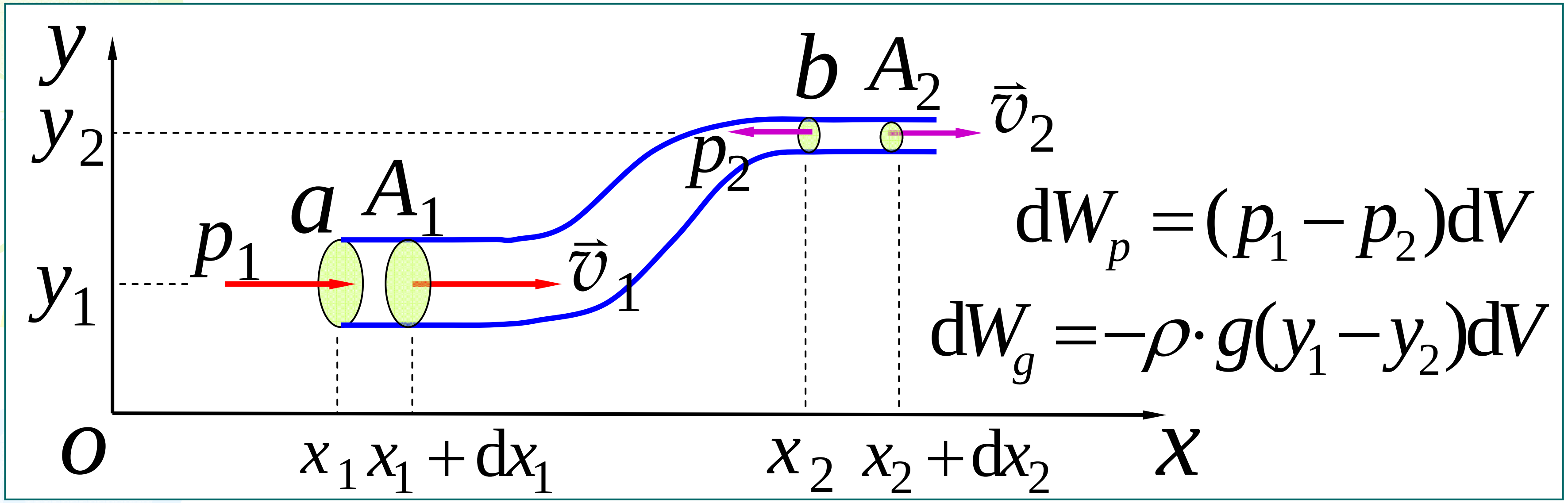


解 取如图所示坐标,在$\mathrm{d}t$时间内a、b处流体分别移动$\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$.

则
$$\mathrm{d}W_p = p_1 A_1 \mathrm{d}x_1 - p_2 A_2 \mathrm{d}x_2$$

$$A_1 \mathrm{d}x_1 = A_2 \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}V \qquad \therefore \mathrm{d}W_p = (p_1 - p_2)\mathrm{d}V$$

又
$$\mathrm{d}W_g = -\mathrm{d}m \cdot g(y_1 - y_2) = -\rho \cdot g(y_1 - y_2)\mathrm{d}V$$

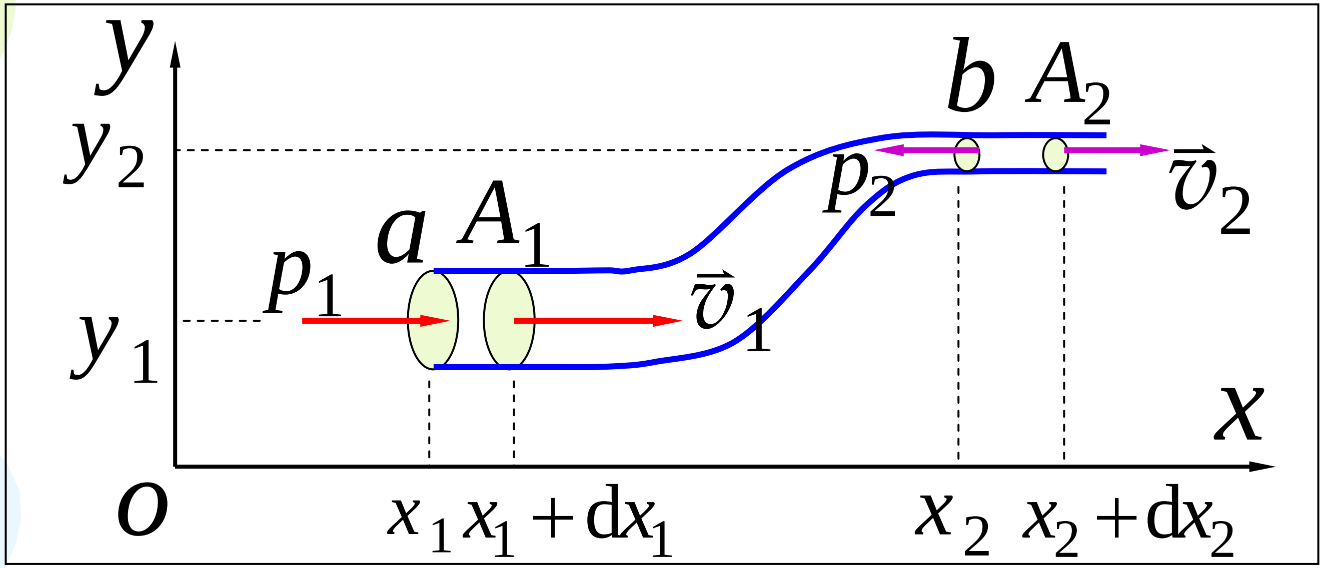


由动能定理得

$$(p_1-p_2)dV-\rho\cdot g(y_2-y_1)dV=\frac{1}{2}\rho dV v_2^2-\frac{1}{2}\rho dV v_1^2$$

得
$$p_1+\rho g y_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g y_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

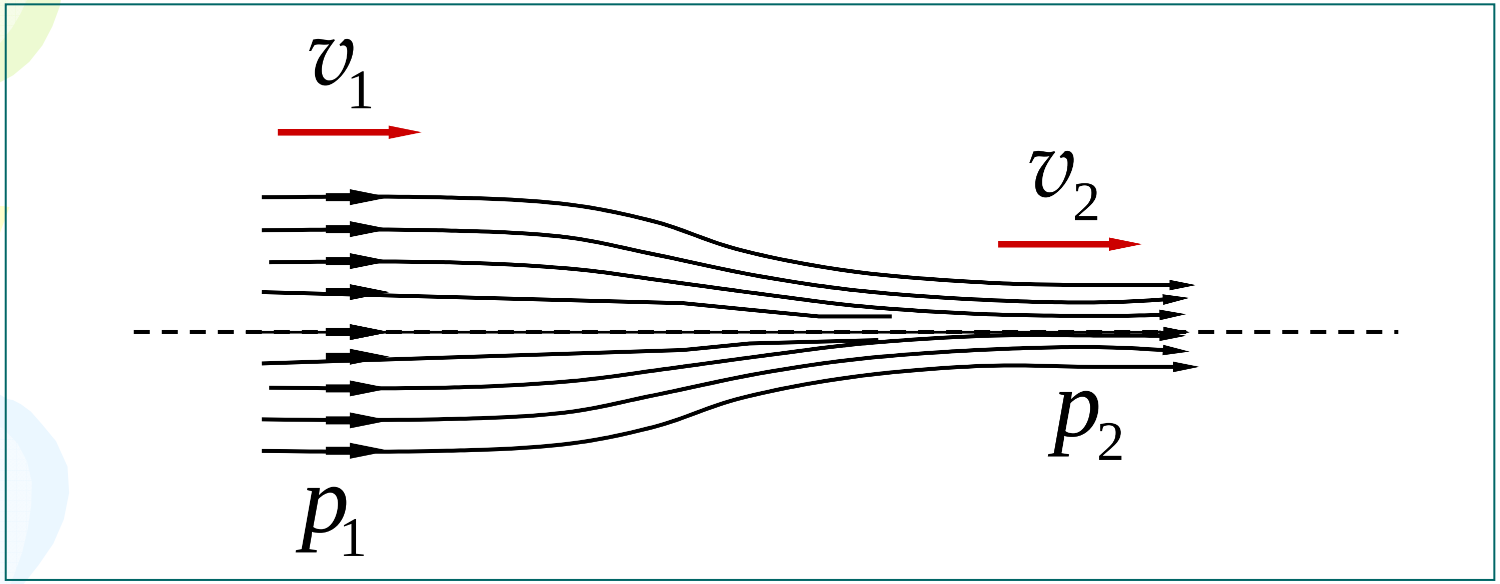
即
$$p+\rho g y+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$



◆ 伯努利方程 $p+\rho g y+\frac{1}{2}\rho v^2=$ 常量

若将流管放在水平面上，即 $y_1=y_2$

则有 $p+\frac{1}{2}\rho v^2=$ 常量

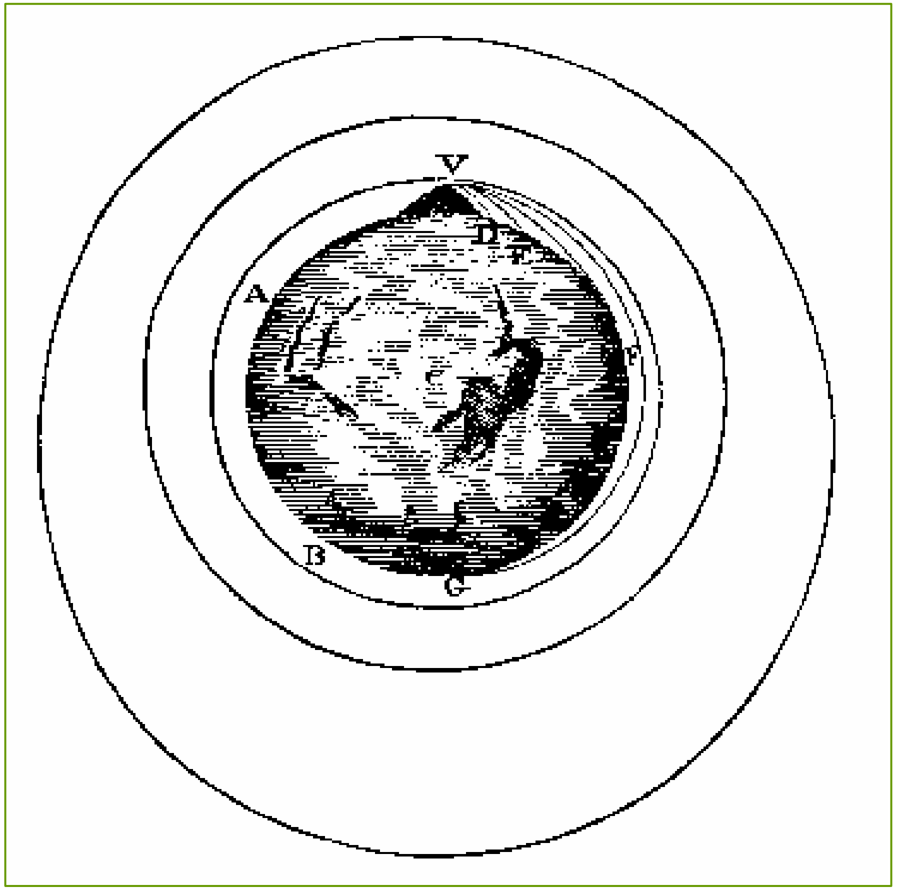


若将流管放在水平面上，即 $y_1 = y_2$

则有 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ 常量 即 $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

若 $p_1 > p_2$ 则 $v_1 < v_2$

四 宇宙速度



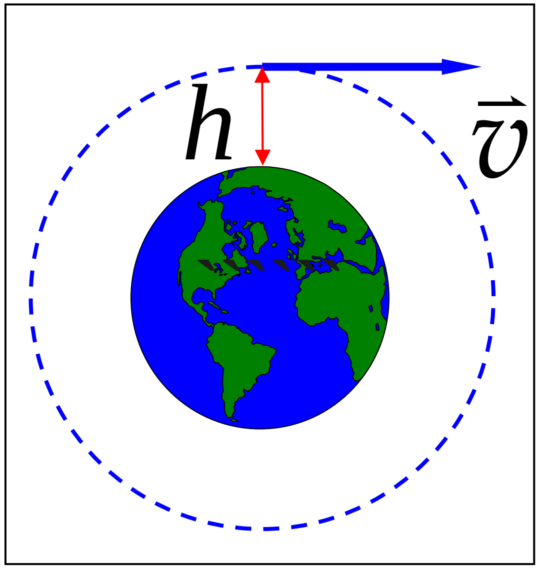
牛顿的《自然哲学的数学原理》插图，抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度

1） 人造地球卫星 第一宇宙速度

第一宇宙速度 v_1，是在地面上发射人造地球卫星所需的最小速度.

设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E.

解 取抛体和地球为一系统，系统的机械能 E 守恒.



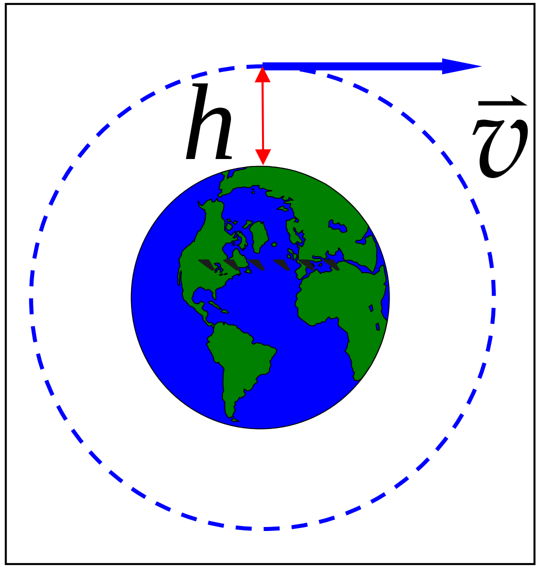
$$E=\frac{1}{2}mv_1^2+(-G\frac{mm_E}{R_E})$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{mm_E}{R_E+h})$$

$$\because E=\frac{1}{2}mv_1^2+(-G\frac{mm_E}{R_E})=\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{mm_E}{R_E+h})$$

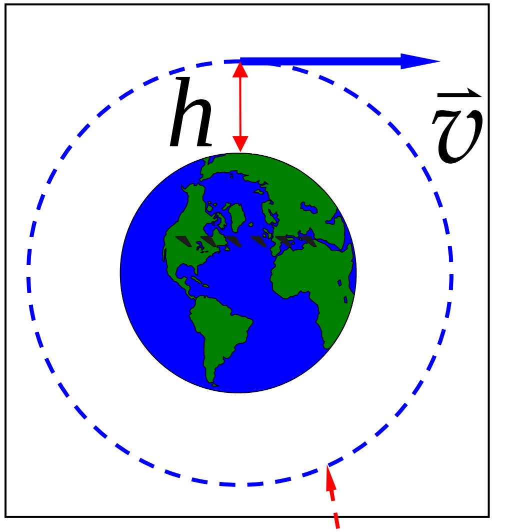
由牛顿第二定律和万有引力定律得

$$m\frac{v^2}{R_E+h}=G\frac{mm_E}{(R_E+h)^2}$$



解得 $v_1=\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}-\frac{Gm_E}{R_E+h}}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} - \frac{Gm_E}{R_E + h}}$$

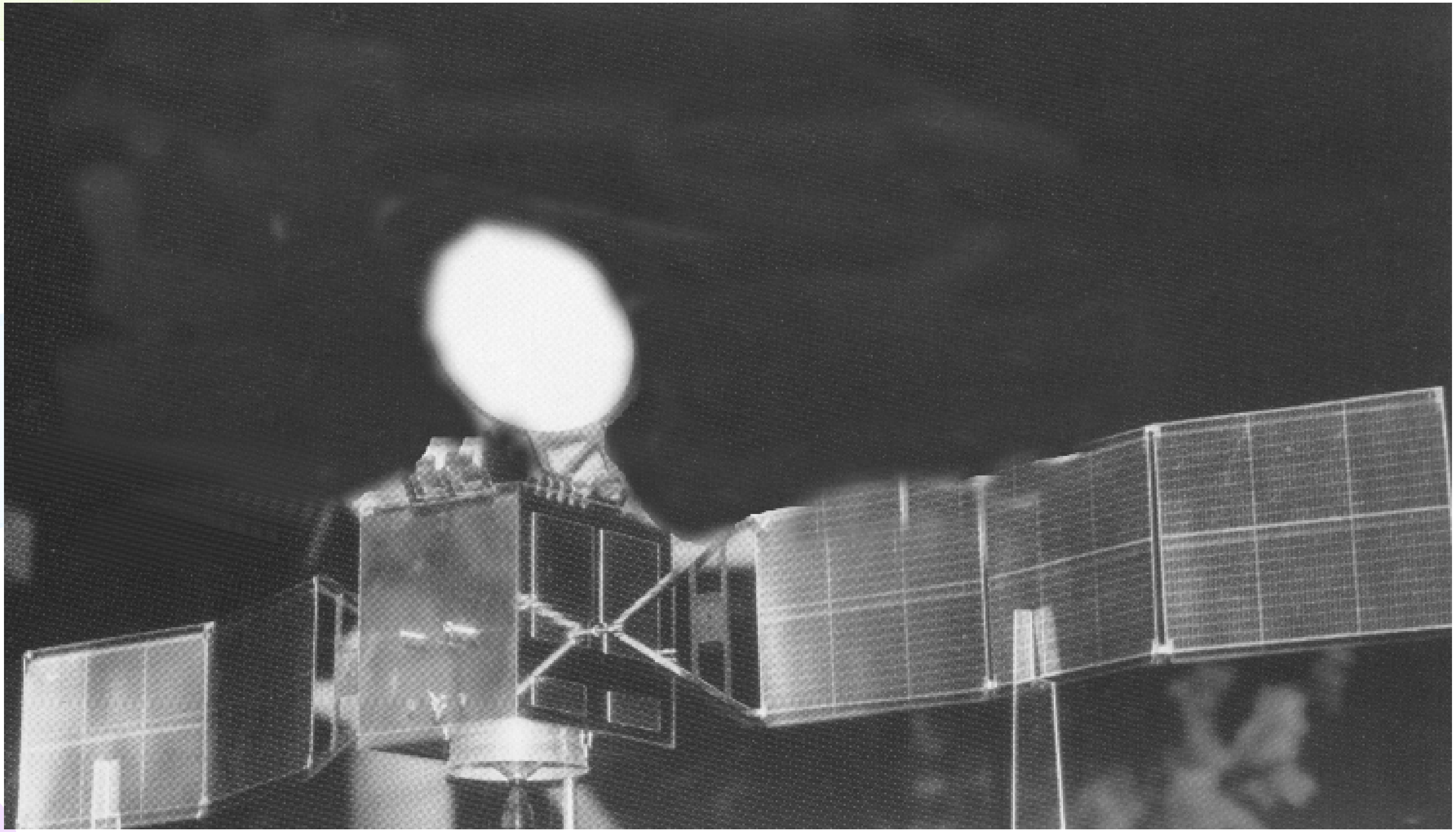


$$\because g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \quad \therefore v_1 = \sqrt{gR_E\left(2 - \frac{R_E}{R_E + h}\right)}$$

地球表面附近 $R_E >> h$ 故 $v_1 = \sqrt{gR_E}$ $\boxed{E<0}$

计算得 $v_1 = 7.9 \times 10^3 \text{m/s}$ 第一宇宙速度

$$E = -\frac{Gmm_E}{2(R_E + h)} < 0$$



我国1977年发射升空的东方红三号通信卫星

2） 人造行星 第二宇宙速度

第二宇宙速度v_2，是抛体脱离地球引力所需的最小发射速度 .

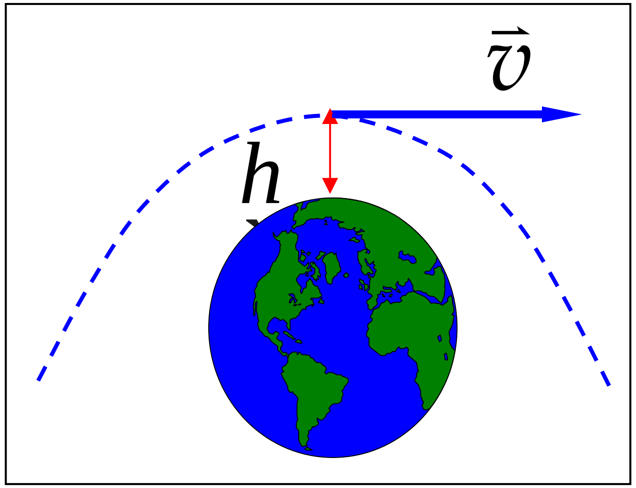
设 地球质量m_E，抛体质量m，地球半径 R_E.

取抛体和地球为一系统 系统机械能 E **守恒** .

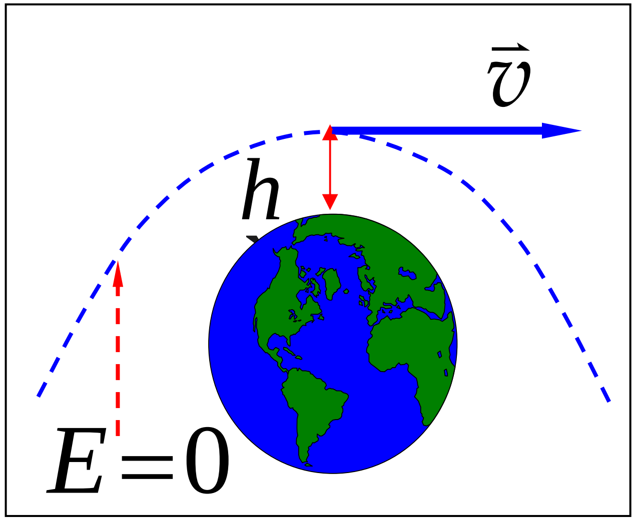
当 $r \to \infty$， $F \to 0$； 若此时 $v \to 0$ 则

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left(-G\frac{m_E m}{R_E}\right)$$

$$= E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$



$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-G\frac{m_E m}{R_E}\right) = 0$$



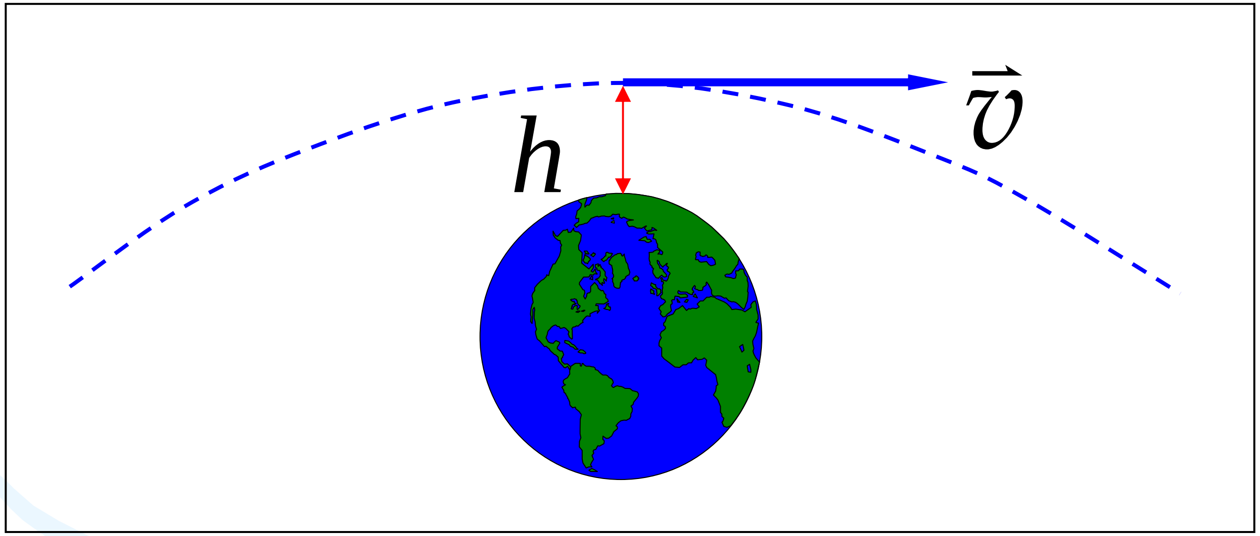
$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

计算得 $v_2 = 11.2\text{km/s}$

第二宇宙速度

3） 飞出太阳系 第三宇宙速度

第三宇宙速度 v_3，是抛体脱离太阳引力所需的最小发射速度.



设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E，太阳质量 m_S，抛体与太阳相距 R_S.

取抛体和地球为一系统，抛体首先要脱离地球引力的束缚, 其相对于地球的速率为 v'.

取地球为参考系,由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_3^2+(-G\frac{m_E m}{R_E})=\frac{1}{2}mv'^2$$

取太阳为参考系，抛体相对于太阳的速度为 v'_3，

则 $\vec{v}'_3=\vec{v}'+\vec{v}_E$

地球相对于太阳的速度

如 $\vec{v}'$ 与 $\vec{v}_E$ 同向,有 $v'_3=v'+v_E$

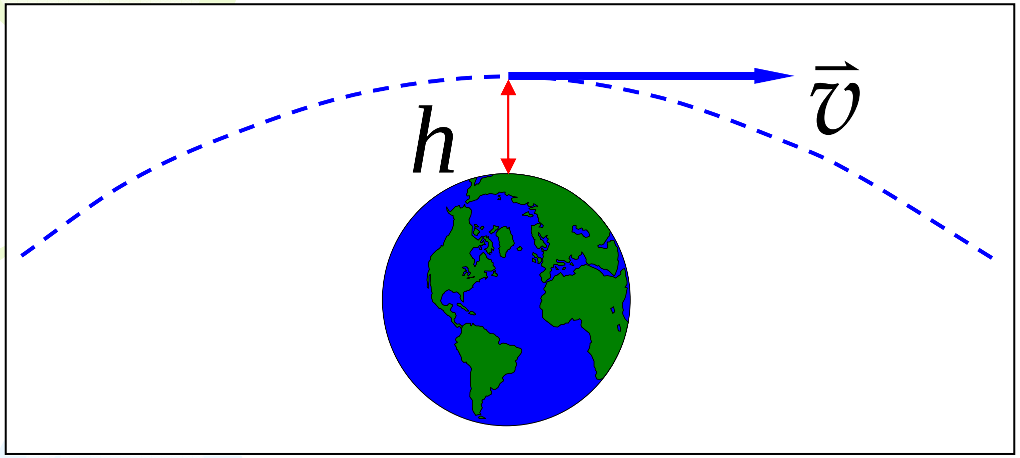
要脱离太阳引力，机械能至少为零

$$E=\frac{1}{2}mv'^{2}_{3}+(-G\frac{m_{S}m}{R_{S}})=E_{k\infty}+E_{p\infty}=0$$

则 $$v'_{3}=(\frac{2Gm_{S}}{R_{S}})^{1/2}$$

设地球绕太阳轨道近似为一圆，由于 $\vec{v}'_{3}$ 与 $\vec{v}_{E}$ 同向，则抛体与太阳的距离 R_{S} 即为地球轨道半径

则 $$m_{E}\frac{v_{E}^{2}}{R_{S}}=G\frac{m_{E}m_{S}}{R_{S}^{2}} \Longrightarrow v_{E}=(G\frac{m_{S}}{R_{S}})^{1/2}$$



$$v' = v'_3 - v_E$$

计算得

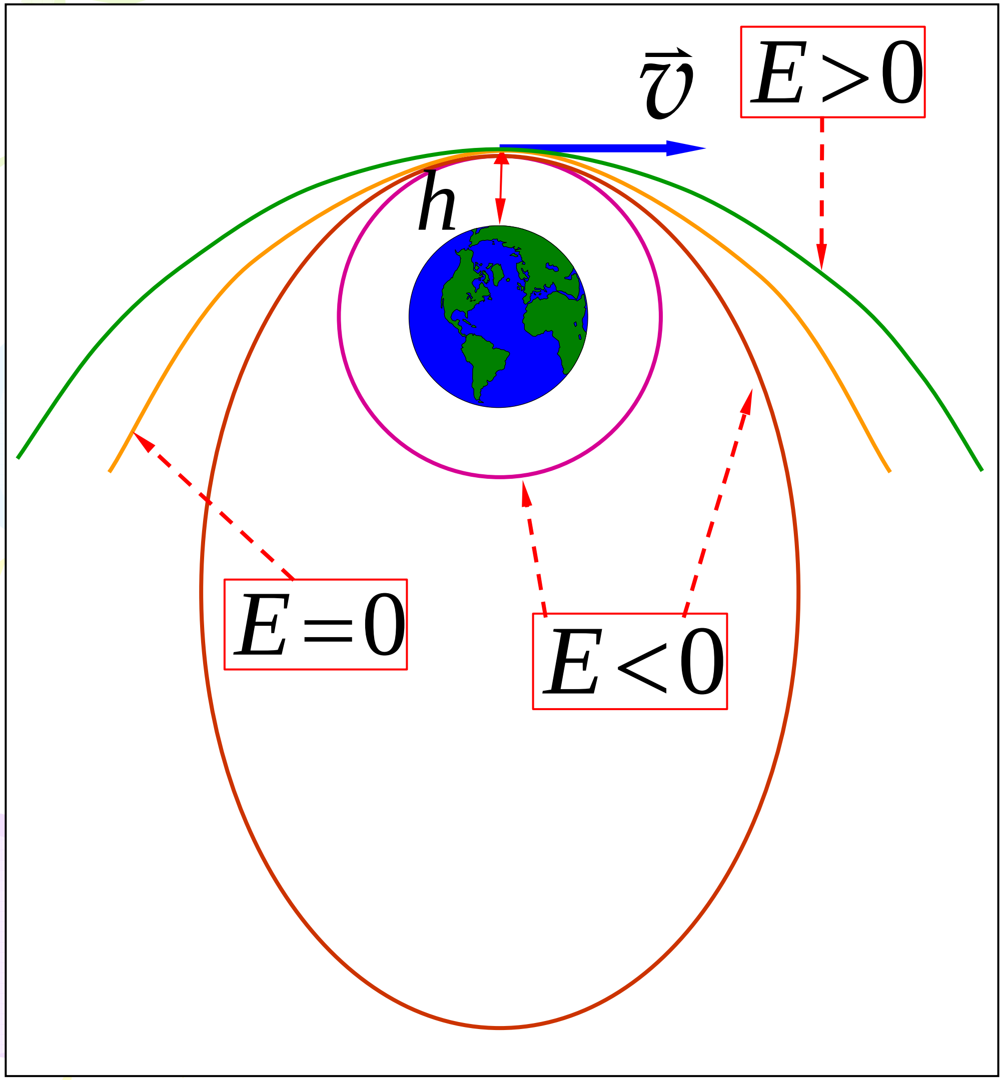
$$v' = (\sqrt{2} - 1)(\frac{Gm_S}{R_S})^{1/2}$$

取地球为参照系 $$\frac{1}{2}mv_3^2 + (-G\frac{m_E m}{R_E}) = \frac{1}{2}mv'^2$$

计算得 $$v_3 = (v'^2 + 2G\frac{m_E}{R_E})^{1/2} = 16.4\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

第三宇宙速度

抛体的轨迹与能量的关系



- $E<0$ 椭圆(包括圆)

  $v_1 = 7.9\text{km/s}$

- $E=0$ 抛物线

  $v_2 = 11.2\text{km/s}$

- $E>0$ 双曲线

  $v_3 = 16.4\text{km/s}$