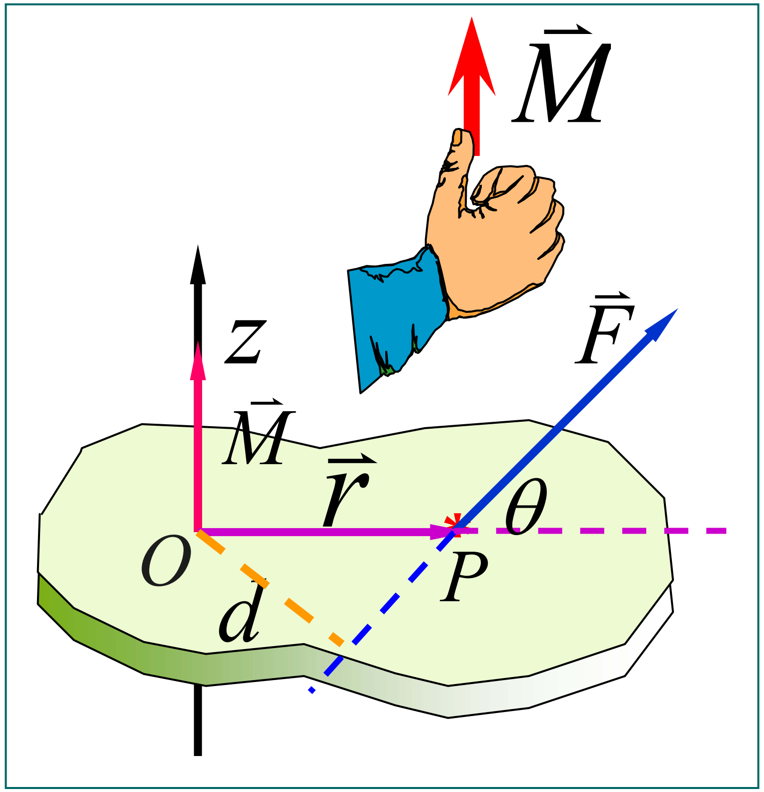
一　力矩

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点 O 到力的作用点 P 的径矢．

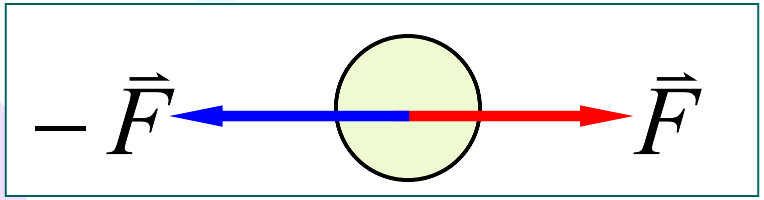


$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

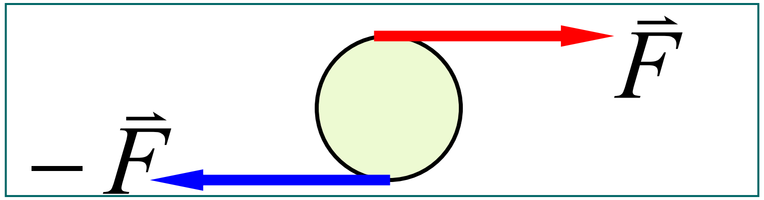
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$M=Fr\sin\theta=Fd$$

d ：力臂



$$\sum\vec{F}_i=0\,,\ \sum\vec{M}_i=0$$



$$\sum\vec{F}_i=0\,,\ \sum\vec{M}_i\neq 0$$

讨论

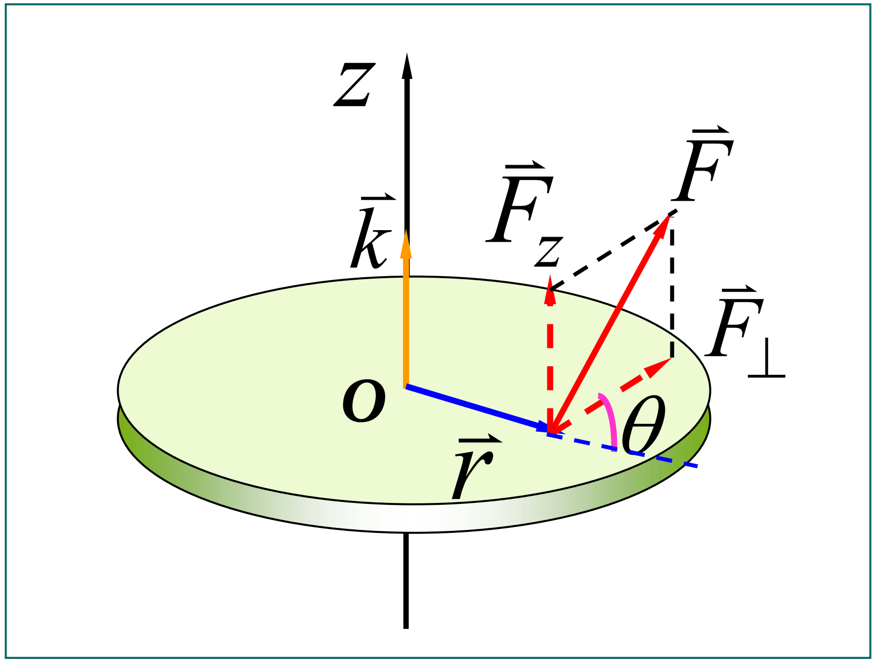
1）若力$\vec{F}$不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

其中$\vec{F}_z$对转轴的力矩为零，故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩

$$M_z \vec{k} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

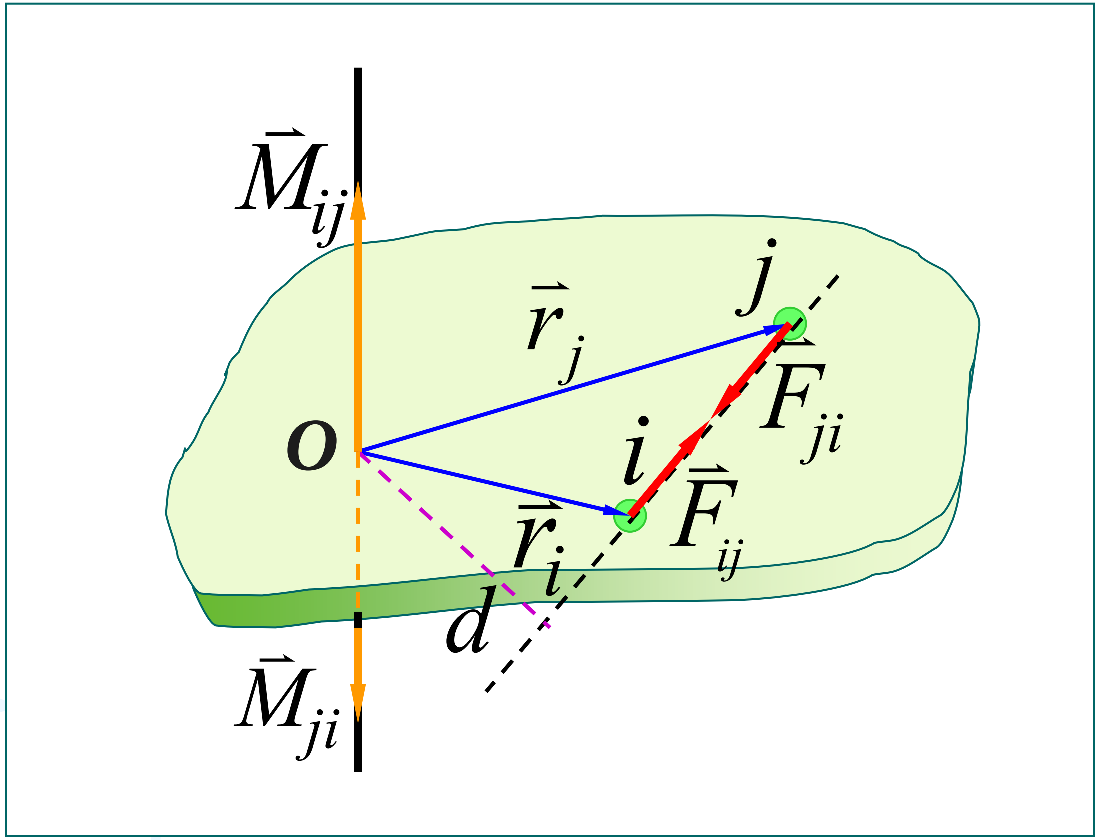
$$M_z = rF_\perp \sin\theta$$



2）合力矩等于各分力矩的矢量和

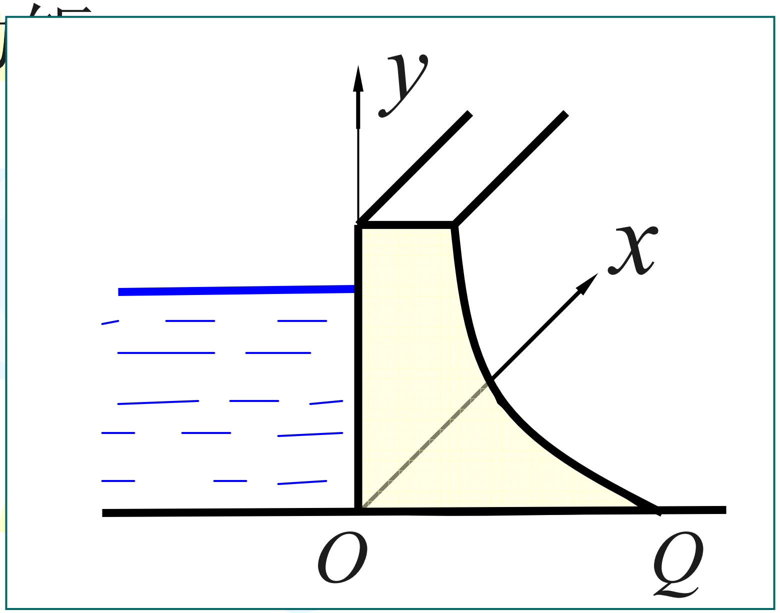
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

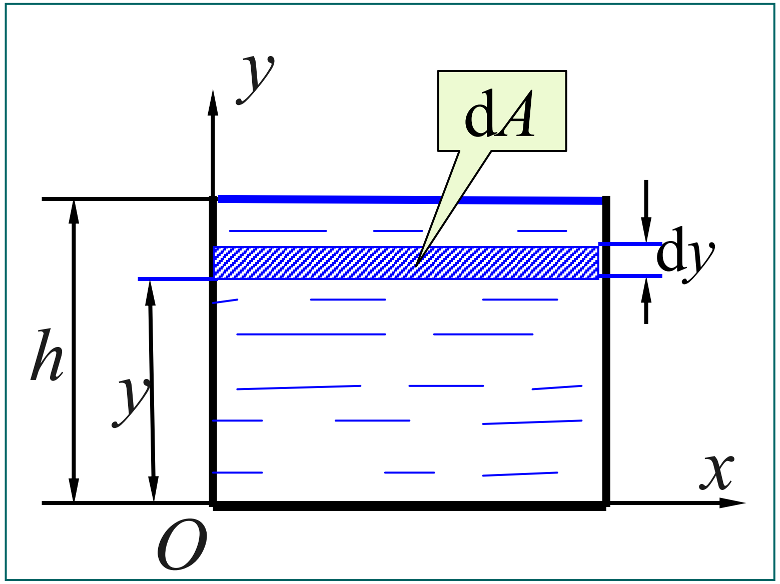
3） 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

例1 有一大型水坝高110 m、长1000m，水深100m，水面与大坝表面垂直，如图所示．求作用在大坝上的力，以及这个力对通过大坝基点 Q 且与 x 轴平行的力矩．





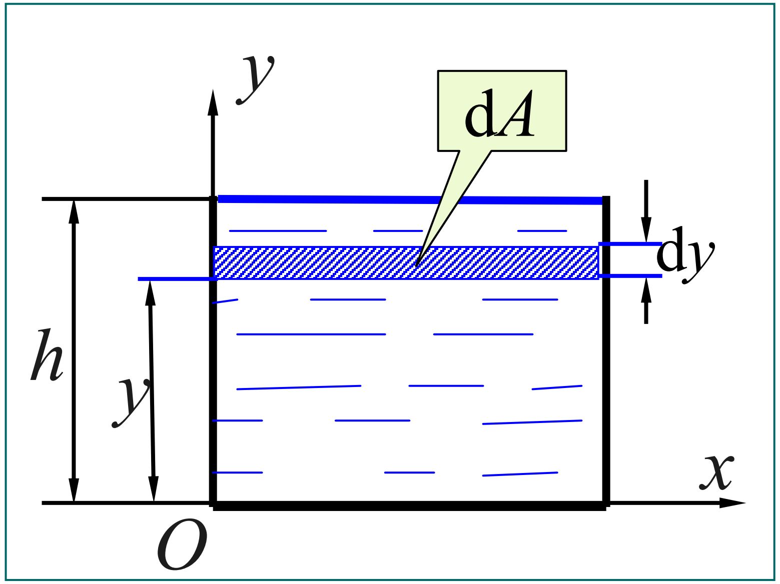
解 设水深h，坝长L，在坝面上取面积元 $\mathrm{d}A = L\mathrm{d}y$

作用在此面积元上的力

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = pL\mathrm{d}y$$

$$h = 100\text{m} \qquad L = 1000\text{m}$$

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = pL\mathrm{d}y$$



令大气压为 p_0，则

$$p = p_0 + \rho g(h-y)$$

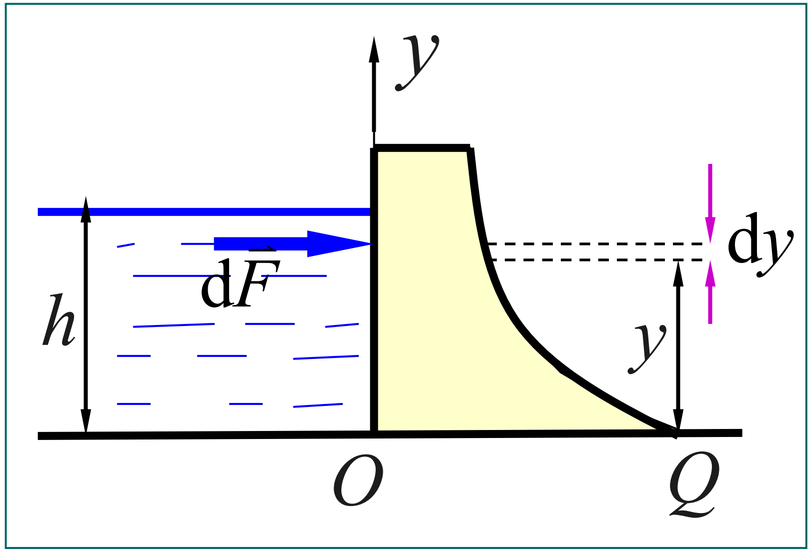
$$\mathrm{d}F = [p_0 + \rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$

$$F = \int_0^h [p_0 + \rho g(h-y)]L\mathrm{d}y = p_0 Lh + \frac{1}{2}\rho g L h^2$$

代入数据，得　　$F = 5.91\times10^{10}\,\text{N}$

$h=100\mathrm{m} \qquad L=1000\mathrm{m}$

$$\mathrm{d}F=[p_0+\rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$



$\mathrm{d}\vec{F}$对通过点Q的轴的力矩

$$\mathrm{d}M=y\mathrm{d}F$$

$$\mathrm{d}M=y[p_0+\rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$

$$M=\int_0^h y[p_0+\rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}p_0Lh^2+\frac{1}{6}g\rho Lh^3$$

代入数据，得 $M=2.14\times10^{12}\,\mathrm{N\cdot m}$

二　转动定律

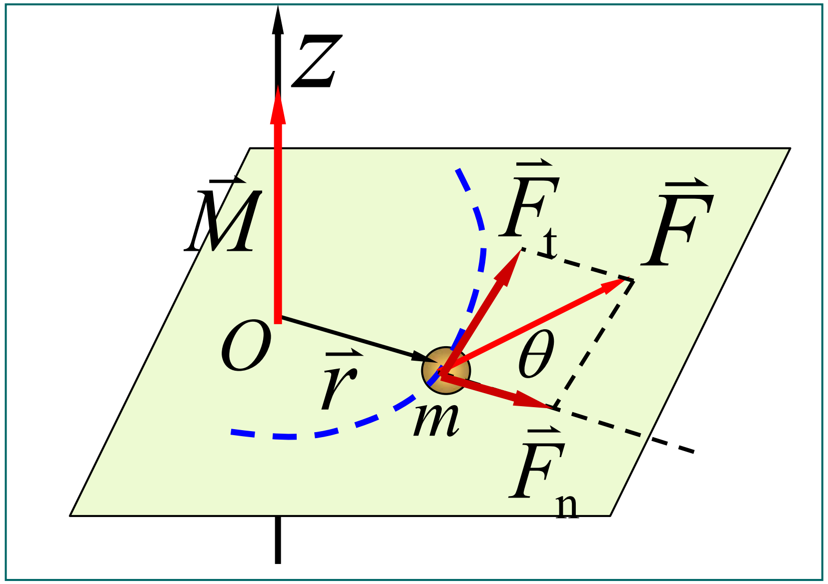
1） 单个质点m 与转轴刚性连接

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$

$$M = rF\sin\theta$$

$$M = rF_{\mathrm{t}} = mr^2\alpha$$

$$M = mr^2\alpha$$

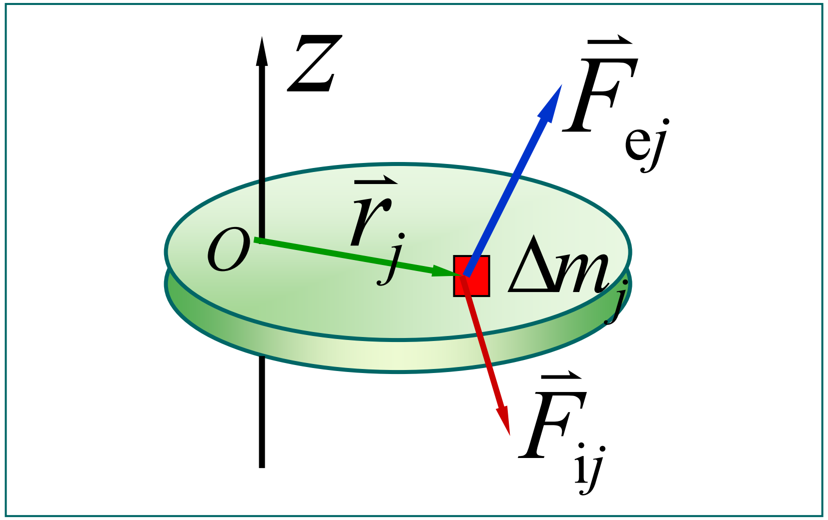


2） 刚体

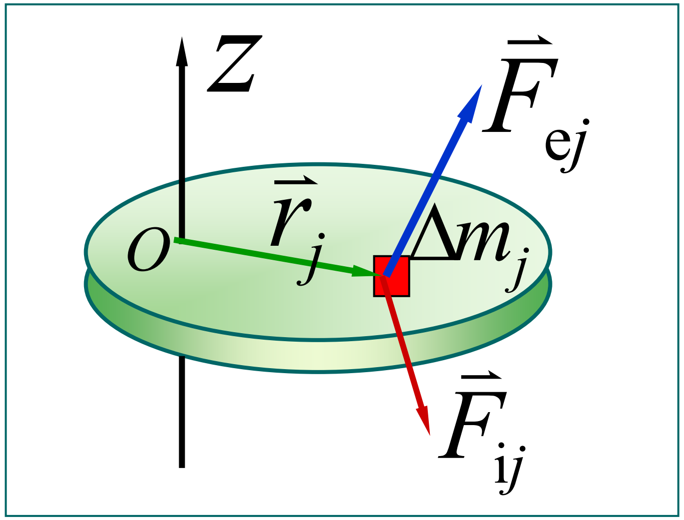
质量元受外力 $\vec{F}_{\mathrm{e}j}$，内力 $\vec{F}_{\mathrm{i}j}$

$$M_{\mathrm{e}j} + M_{\mathrm{i}j} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

外力矩　　内力矩



$$\sum_j M_{ej} + \sum_j M_{ij} = \sum \Delta m_j r_j^2 \alpha$$



$$\because M_{ij} = -M_{ji} \qquad \therefore \sum_j M_{ij} = 0$$

$$\sum_j M_{ej} = (\sum \Delta m_j r_j^2)\alpha$$

定义转动惯量 $J = \sum_j \Delta m_j r_j^2 \qquad J = \int r^2 \mathrm{d}m$

◆ 转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比．

三　转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2\ ,\ J=\int r^2 \mathrm{d}m$$

- 物理意义：转动惯性的量度．

转动惯性的计算方法

- 质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2=m_1 r_1^2+m_2 r_2^2+\cdots$$

- 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2=\int r^2 \mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$ ：质量元

➢ 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2=\int r^2\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$ ：质量元

- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$

  λ ：质量线密度

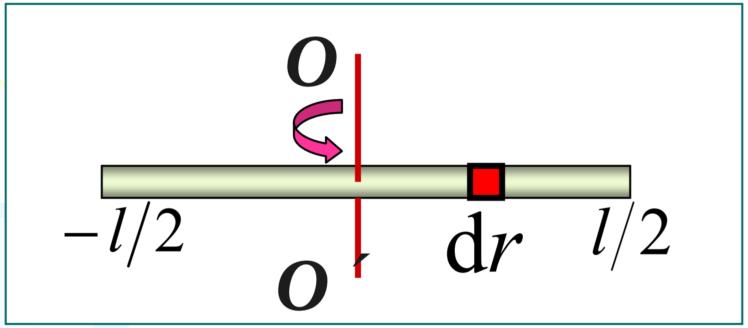
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}S$

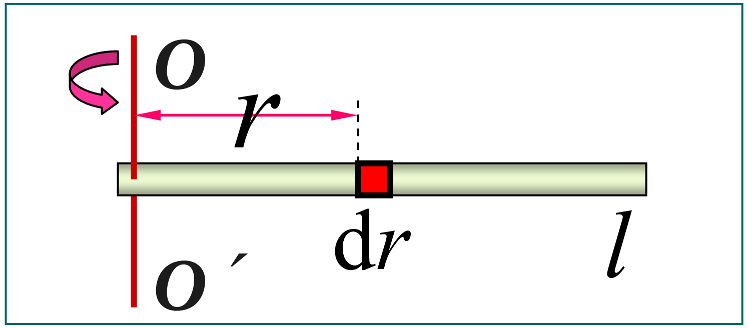
  σ ：质量面密度

- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$

  ρ ：质量体密度

例2　一质量为 m、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量．





解　设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}r$　$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=\lambda r^2\mathrm{d}r$

$$J=2\lambda\int_0^{l/2}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{12}\lambda l^3$$

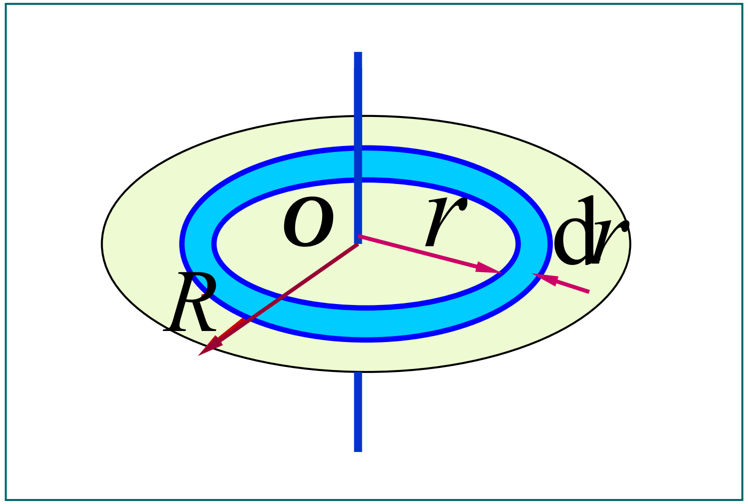
$$=\frac{1}{12}ml^2$$

如转轴过端点垂直于棒

$$J=\lambda\int_0^l r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}ml^2$$

例3 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 .

解 设圆盘面密度为 σ，在盘上取半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

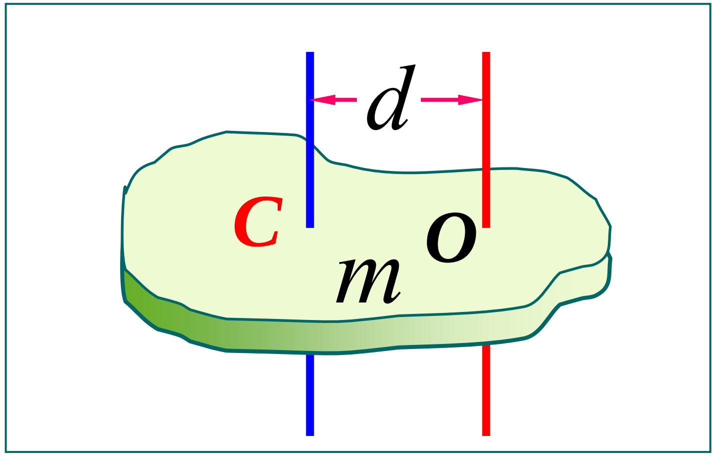
$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r$$

而 $\sigma = m/\pi R^2$

$$J = \int_0^R 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi R^4$$

所以 $J = \dfrac{1}{2}mR^2$

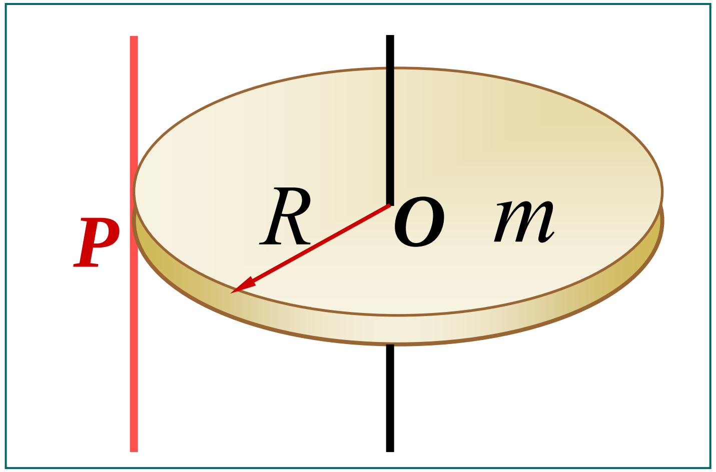
注意 转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置．



四 平行轴定理

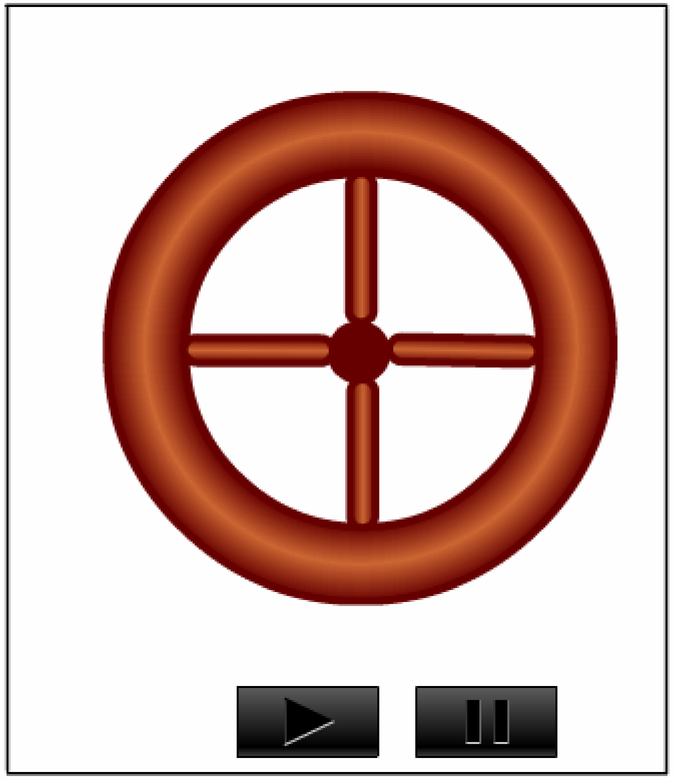
质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为d的转轴的转动惯量

$$J_O = J_C + md^2$$

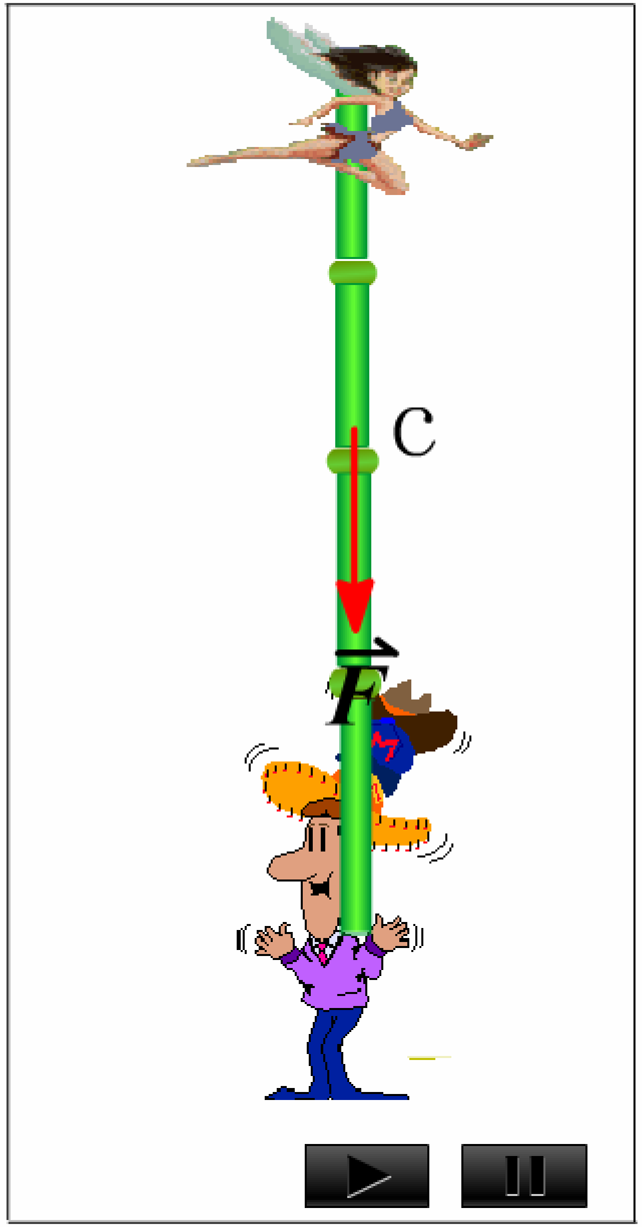


圆盘对P轴的转动惯量

$$J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

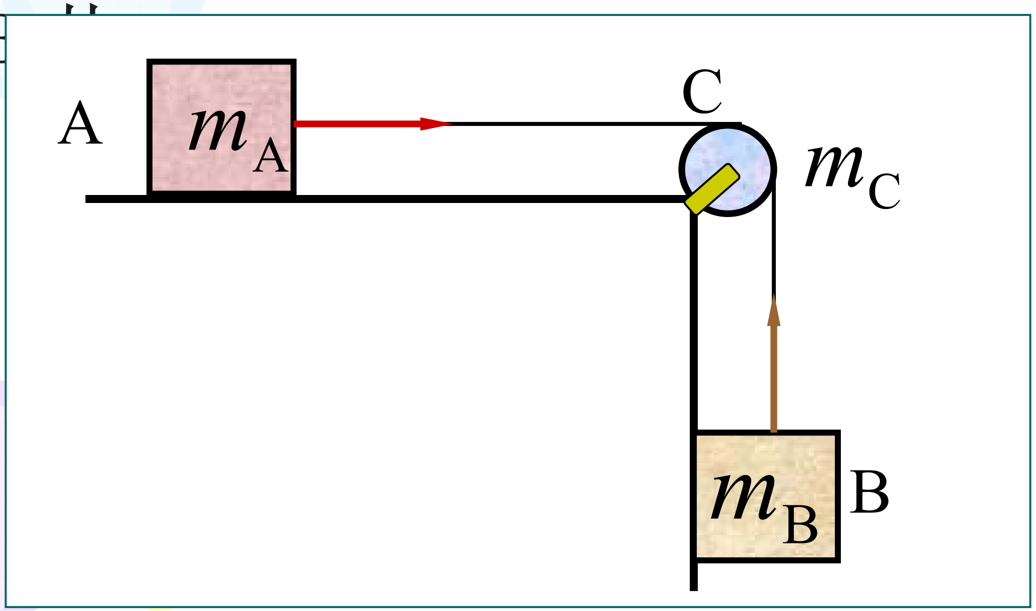


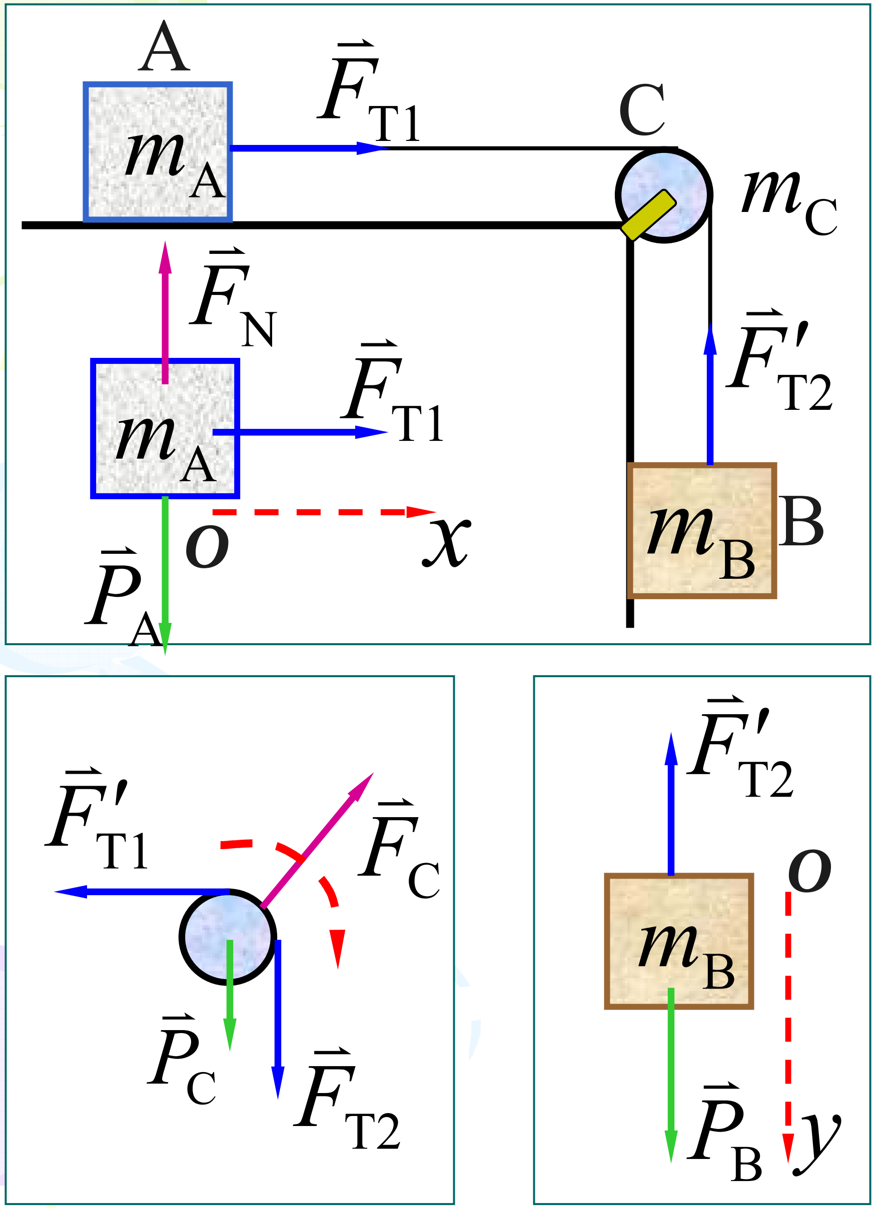
飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

例4　质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上. 滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计. 问：（1）两物体的线加速度为多少？水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（2）物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？（3）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为 M_f 再求线加速度及绳的张力.

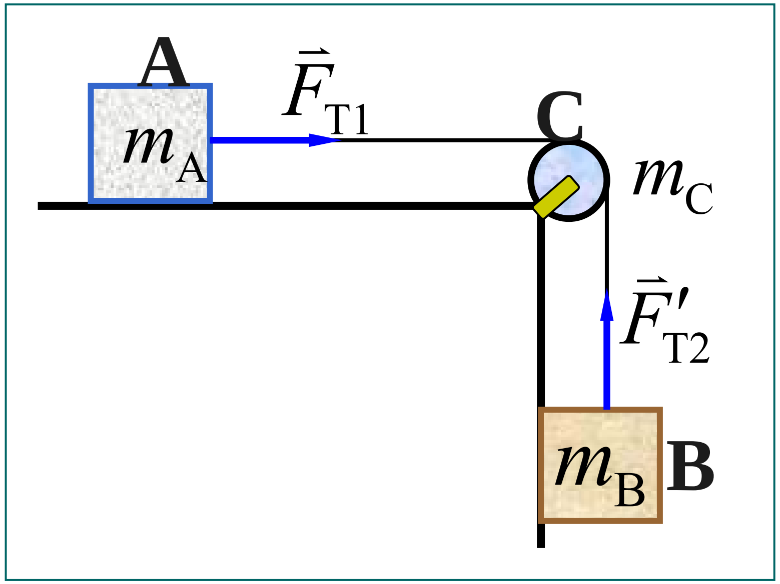




解 （**1**）隔离物体分别对物体A、B 及滑轮作受力分析，取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程．

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_A a \\ m_B g - F_{\mathrm{T2}} = m_B a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2} \\ F_{\mathrm{T1}}=\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2} \\ F_{\mathrm{T2}}=\dfrac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}/2)m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2} \end{cases}$$



如令$m_{\mathrm{C}}=0$，可得　$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$

（2） B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

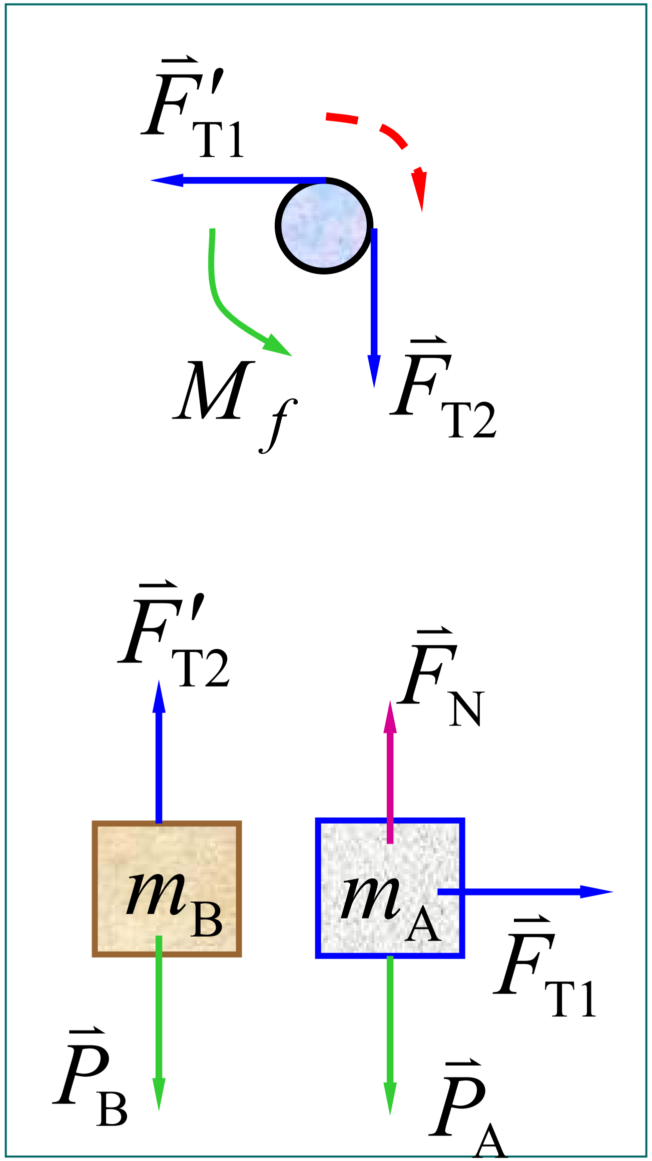
$$v=\sqrt{2ay}=\sqrt{\frac{2m_{\mathrm{B}}gy}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}/2}}$$

（3） 考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，转动定律

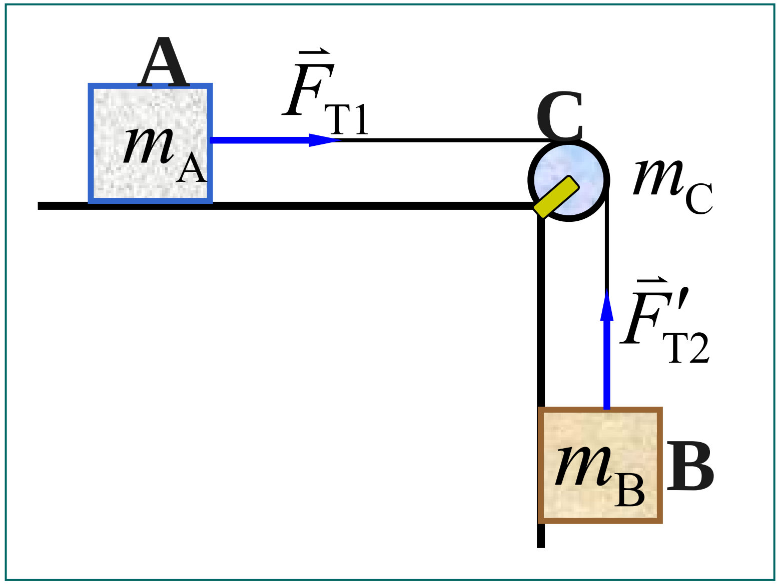
$$RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



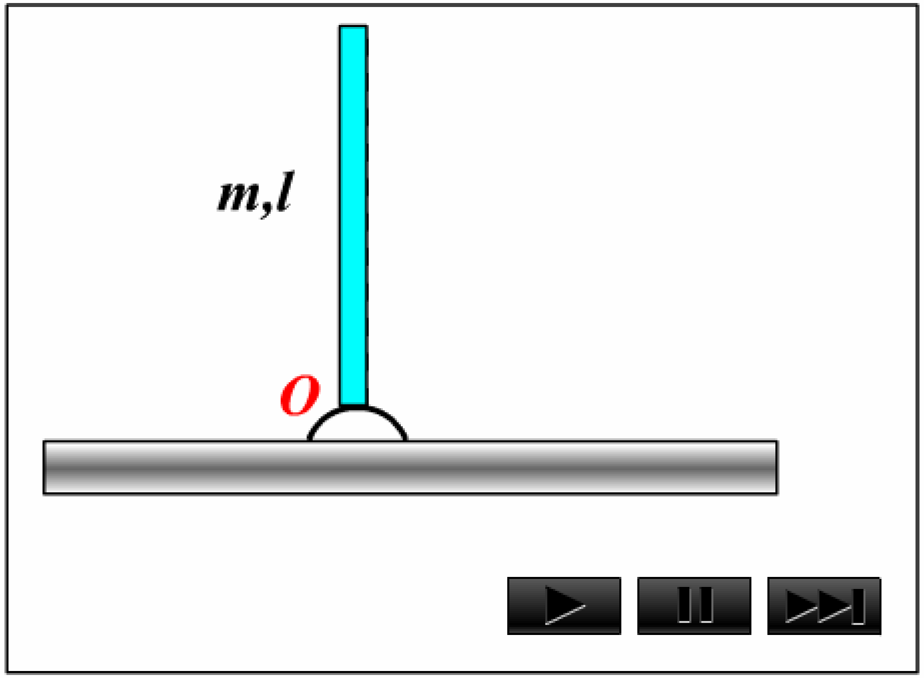
$$a = \frac{m_B g - M_f / R}{m_A + m_B + m_C / 2} \qquad F_{T1} = \frac{m_A(m_B g - M_f / R)}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_B\left[(m_A + m_C/2)\,g + M_f/R\right]}{m_A + m_B + m_C/2}$$

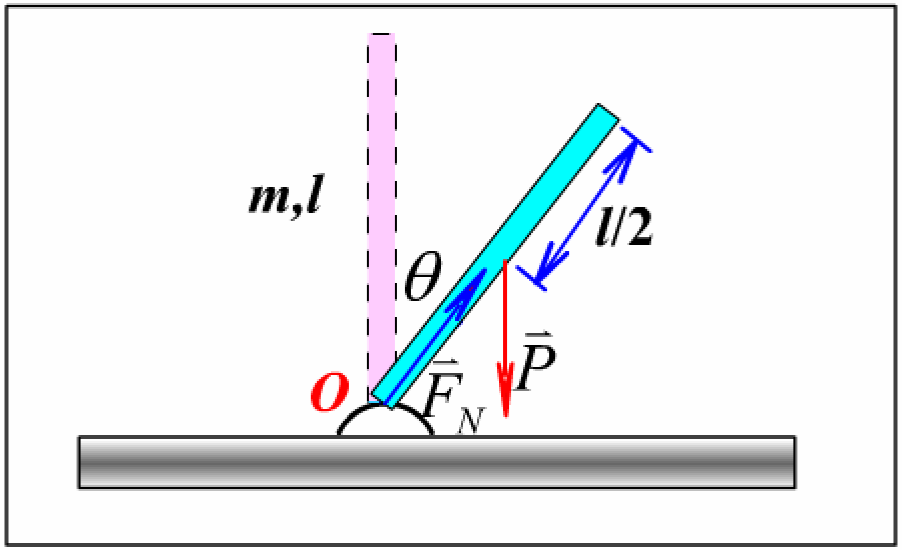
例5 一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动．由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链O 转动．试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度．

解 细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$



$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$



式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$

得 $\alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$

由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分 得 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$