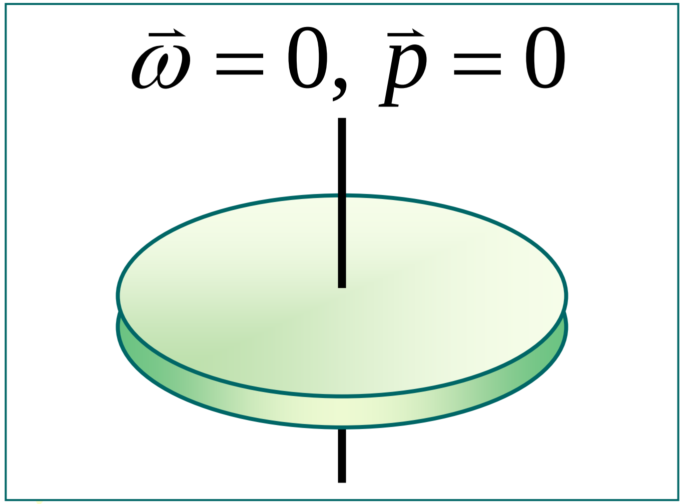
力的时间累积效应 ⇒ 冲量、动量、动量定理.

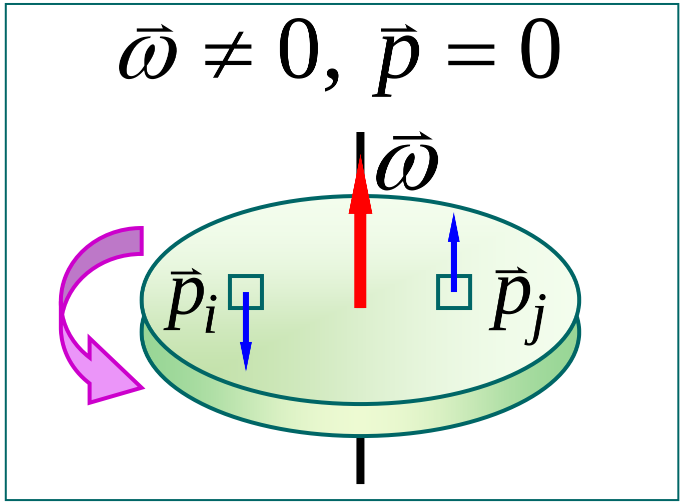
力矩的时间累积效应 ⇒ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一 质点的角动量定理和角动量守恒定律

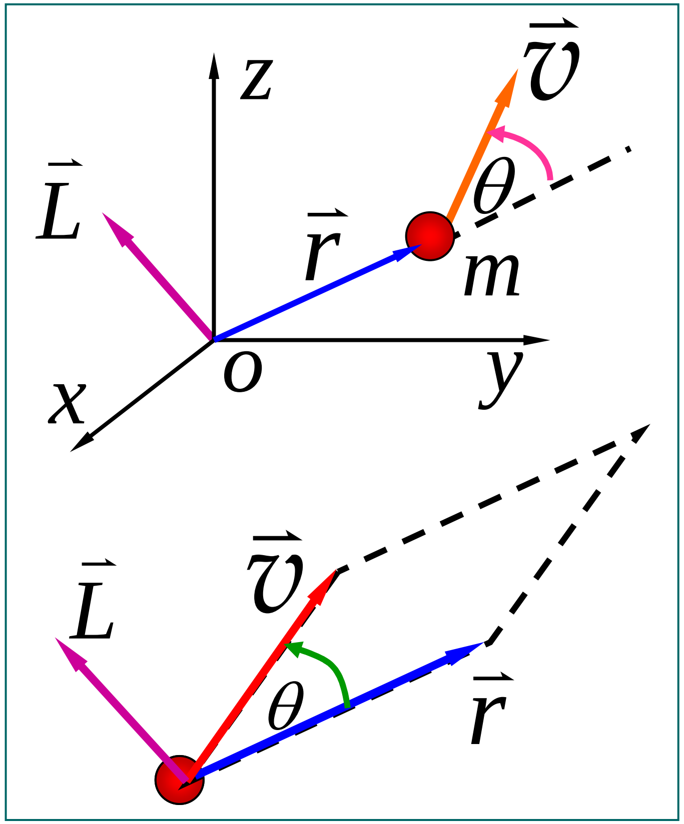
质点运动状态的描述 $\vec{p} = m\vec{v}$ $E_{\mathrm{k}} = mv^2/2$

刚体定轴转动运动状态的描述 $\vec{L} = J\vec{\omega}$ $E_{\mathrm{k}} = J\omega^2/2$





1 质点的角动量

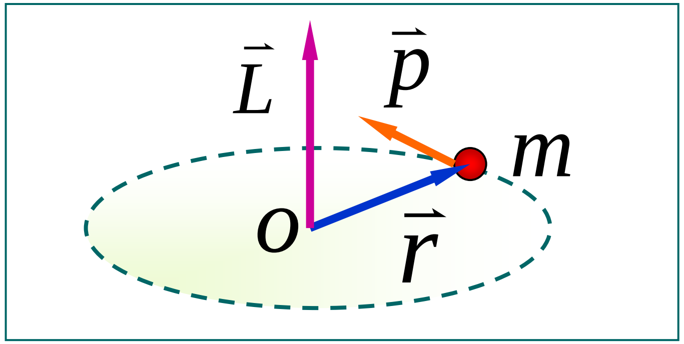


质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 O 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.



质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$L = mr^2\omega = J\omega$$

2 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

作用于质点的合力对**参考点** O 的力矩，等于质点对该点 O 的**角动量**随时间的**变化率**.

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量.

3 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M}=0,\quad \vec{L}=\boxed{\text{恒矢量}}$$

质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量.

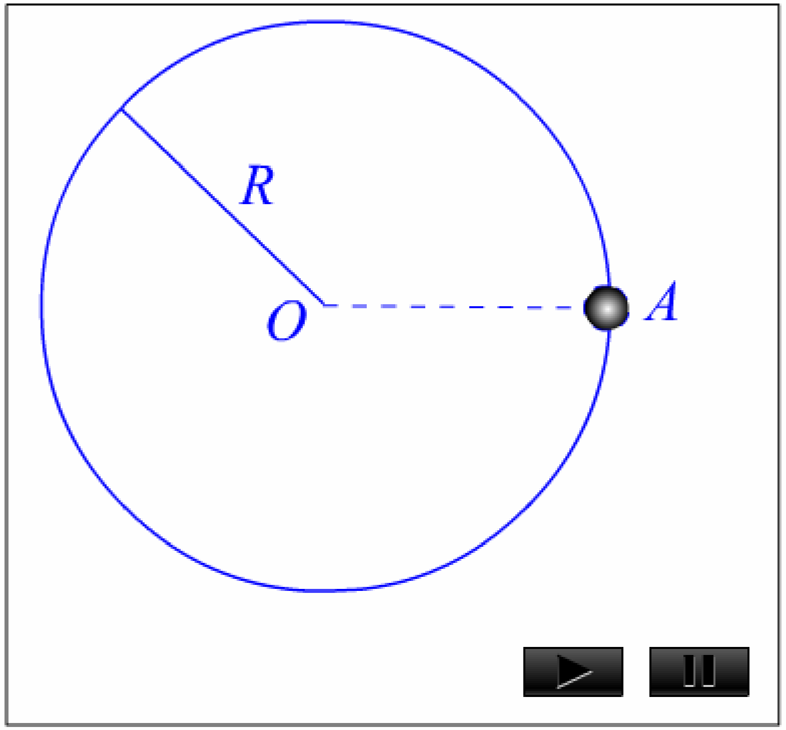
例1　一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内.一质量为 m 的小球穿在圆环上，并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上)，然后从 A 点开始下滑.设小球与圆环间的摩擦略去不计.求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度.

解　小球受重力和支持力作用，支持力的力矩为零，重力矩垂直纸面向里

$$M = mgR\cos\theta$$

由质点的角动量定理

$$mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$



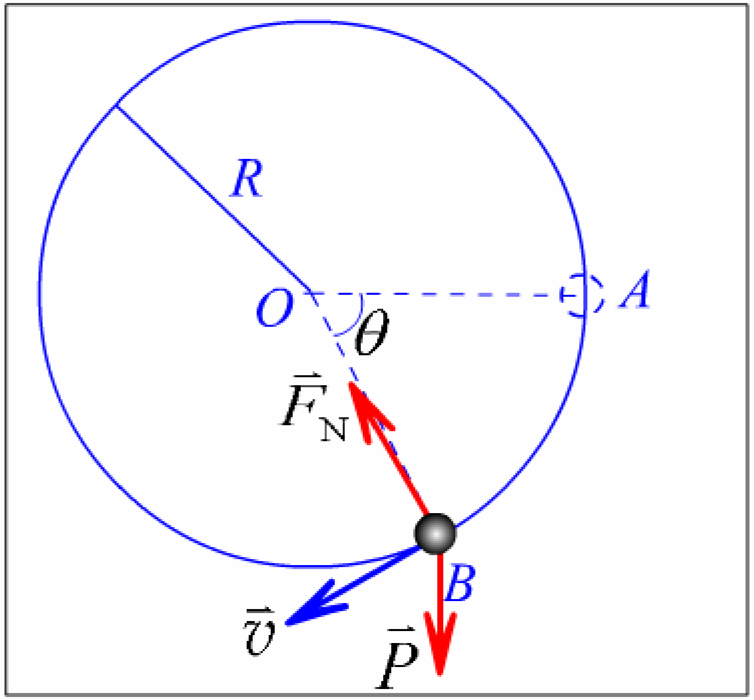
$$mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}L = mgR\cos\theta\mathrm{d}t$$

考虑到

$$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t,\ L = mRv = mR^2\omega$$

得 $L\mathrm{d}L = m^2gR^3\cos\theta\mathrm{d}\theta$

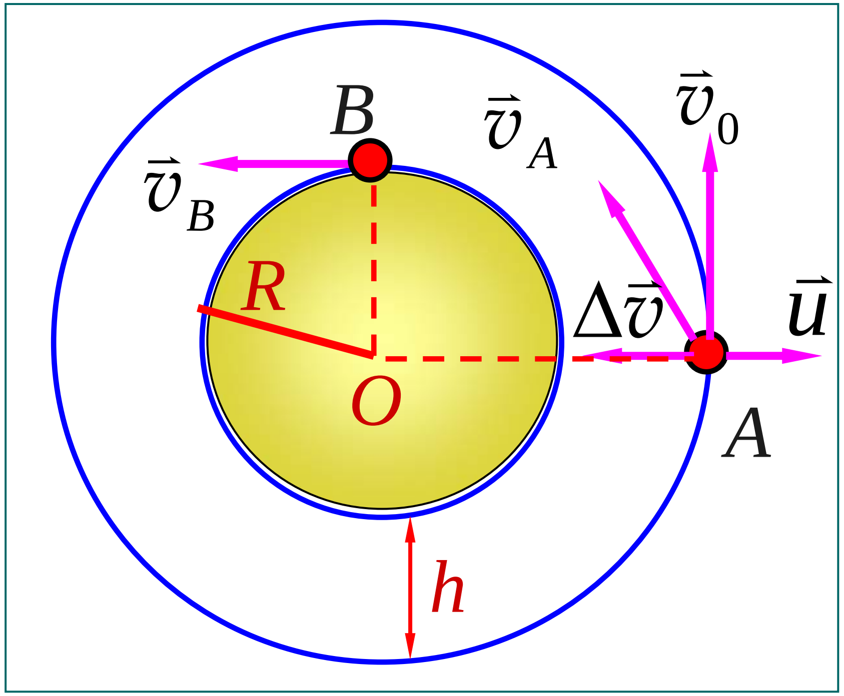


由题设条件积分上式

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2gR^3\int_0^\theta \cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad \because\ L = mR^2\omega$$

$$L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2} \qquad \omega = \left(\frac{2g}{R}\sin\theta\right)^{1/2}$$

例2　一质量 $m = 1.20\times10^{4}\,\mathrm{kg}$ 的登月飞船, 在离月球表面高度 $h = 100\,\mathrm{km}$ 处绕月球作圆周运动.飞船采用如下登月方式： 当飞船位于点 A 时,它向外侧短时间喷气，使飞船与月球相切地到达点 B， 且 OA 与 OB 垂直．飞船所喷气体相对飞船的速度为 $u = 1.00\times10^{4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ．已知月球半径 $R = 1700\,\mathrm{km}$ ；在飞船登月过程中,月球的重力加速度视为常量 $g = 1.62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$．试问登月飞船在登月过程中所需消耗燃料的质量 Δm 是多少?



已知　$m = 1.20\times10^{4}\,\mathrm{kg}$　　$h = 100\ \mathrm{km}$

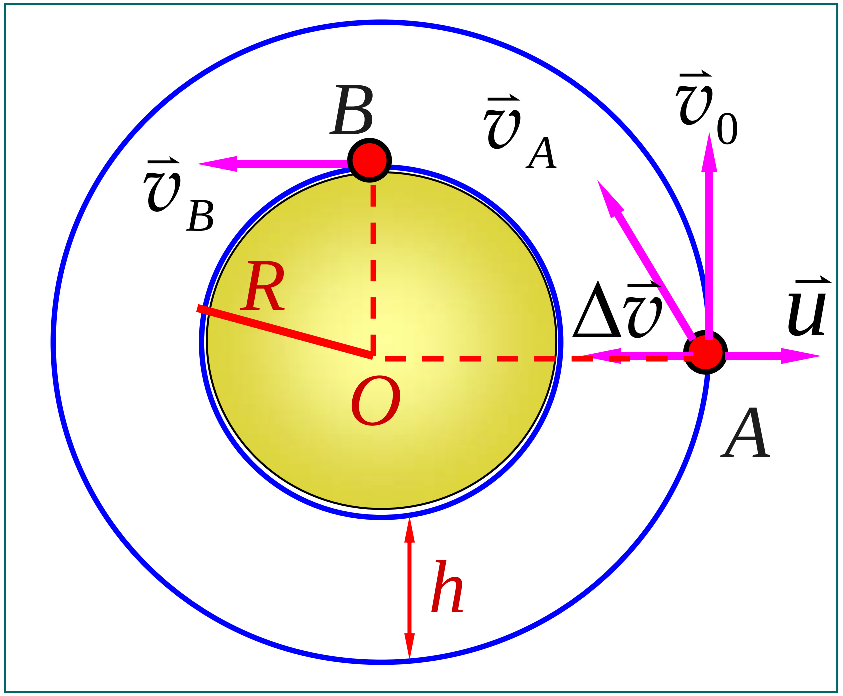
$u = 1.00\times10^{4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　　$R = 1700\ \mathrm{km}$

$g = 1.62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$　求 所需消耗燃料的质量 Δm.

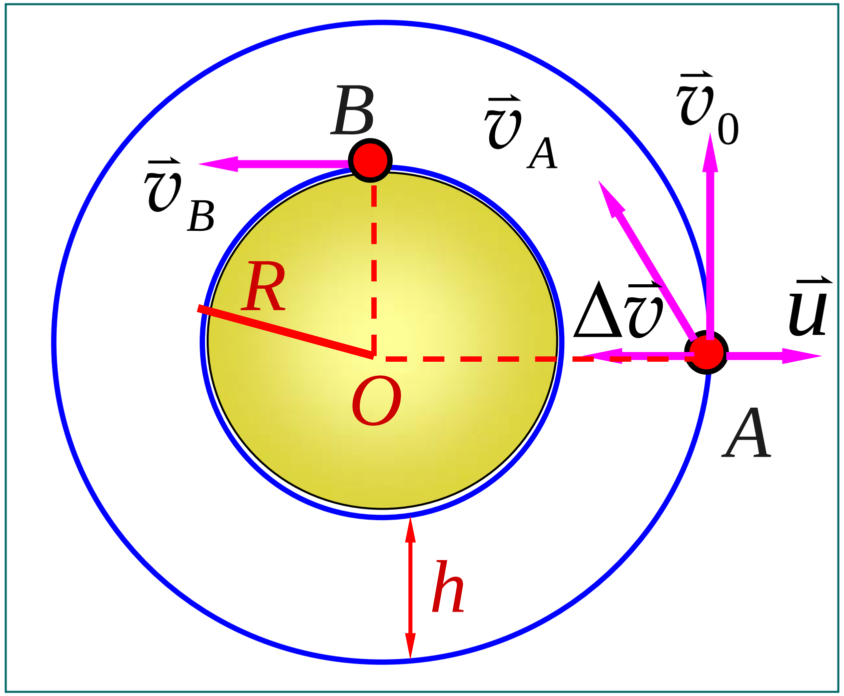
解 设飞船在点 A 的速度 $\vec{v}_0$，月球质量 m_M，由万有引力和牛顿定律

$$G\frac{m_\mathrm{M}m}{(R+h)^2} = m\frac{v_0^2}{R+h}$$

$$g = G\frac{m_\mathrm{M}}{R^2}$$



得 $v_0 = \left(\dfrac{R^2 g}{R+h}\right)^{1/2} = 1612\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



当飞船在*A*点以相对速度 $\vec{u}$ 向外喷气的短时间里，飞船的质量减少了 Δm 而为 m'，并获得速度的增量 $\Delta\vec{v}$，使飞船的速度变为 $\vec{v}_A$，其值为

$$v_A = (v_0^2 + \Delta v^2)^{1/2}$$

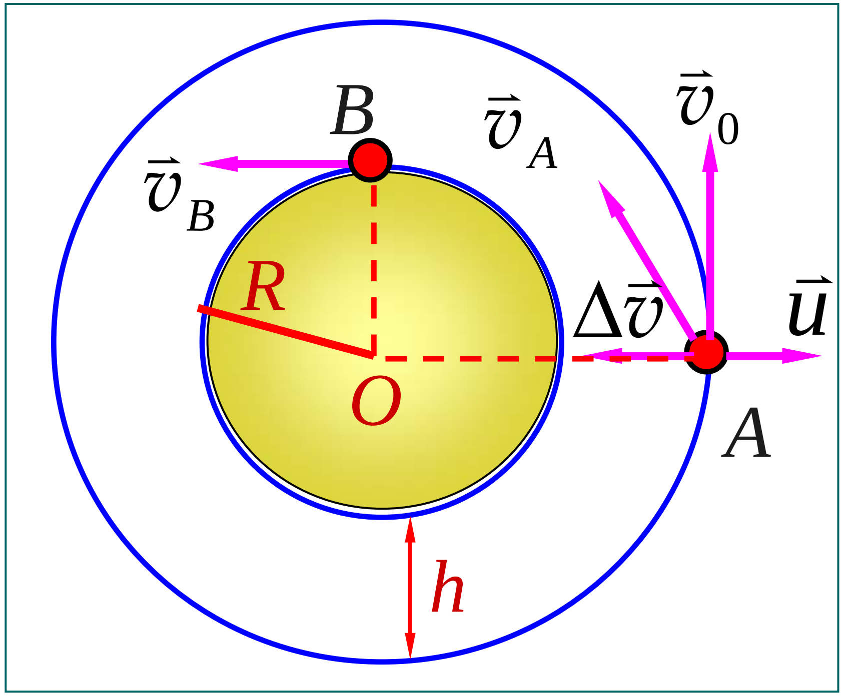
质量 m' 在 A 点和 B 点只受有心力作用，角动量守恒

$$m' v_0 (R+h) = m' v_B R$$

得
$$v_B = (R+h) v_0 / R = 1709\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v_A = (v_0^2 + \Delta v^2)^{1/2}$$

$$v_B = 1709\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



飞船在 A点喷出气体后，在到达月球的过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}m'v_A^2 - G\frac{m_M m'}{R+h} =$$

$$\frac{1}{2}m'v_B^2 - G\frac{m_M m'}{R}$$

即 $v_A^2 = v_B^2 + 2G\dfrac{m_\mathrm{M}}{R+h} - 2G\dfrac{m_\mathrm{M}}{R}$ $\quad v_A = 1615\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

于是 $\Delta v = (v_A^2 - v_0^2)^{1/2} = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

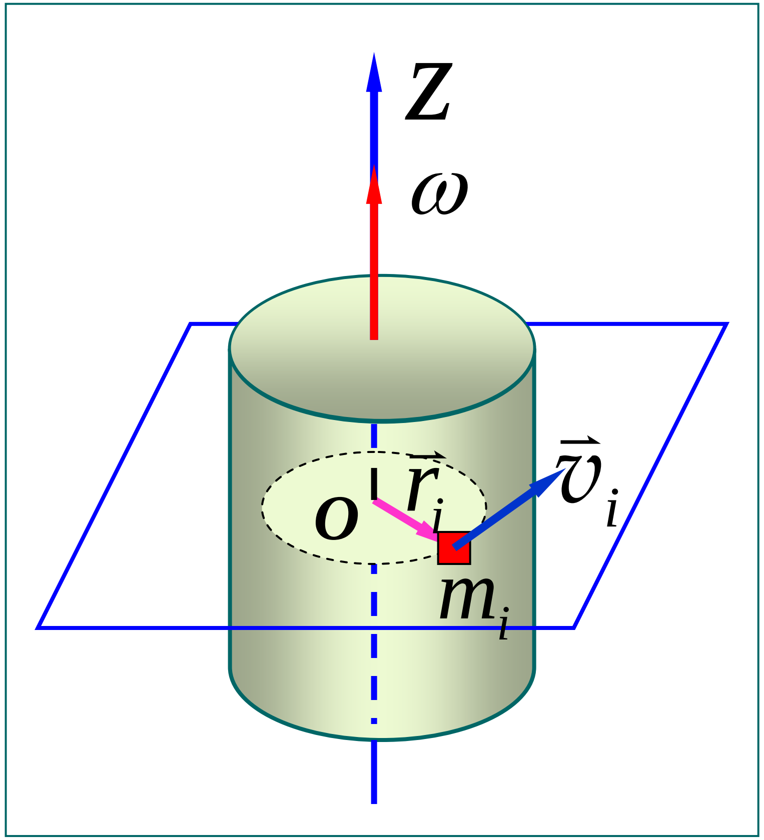
而 $(\Delta m)u = m\Delta v$ $\quad \Delta m = m\Delta v / u = 120\ \mathrm{kg}$

二 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1 刚体定轴转动的角动量

$$L=\sum_i m_i r_i v_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L=J\omega}$$



2 刚体定轴转动的角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t=J\omega_2-J\omega_1}$$

非刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$

刚体定轴转动的角动量定理 $$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$

3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M = 0$ ，则 $\boxed{L = J\omega = 常量}$

讨论

- 守 恒条件　$M = 0$

若 J 不变, ω 不变；若 J 变, ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中　$\because M^{\text{in}} >> M^{\text{ex}} \therefore L \approx 常量$
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

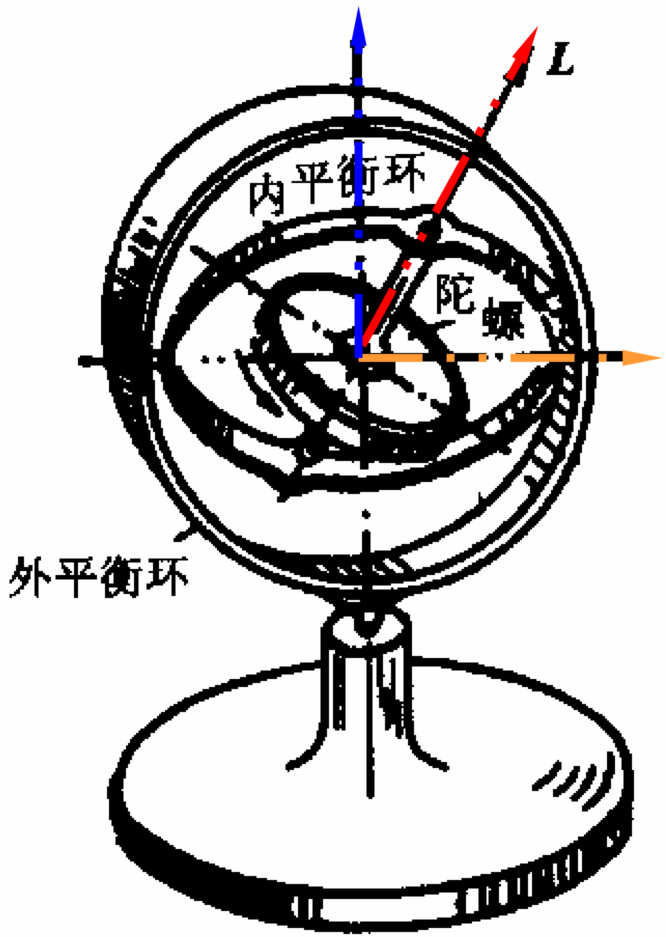
有许多现象都可以用角动量守恒来说明.

- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水

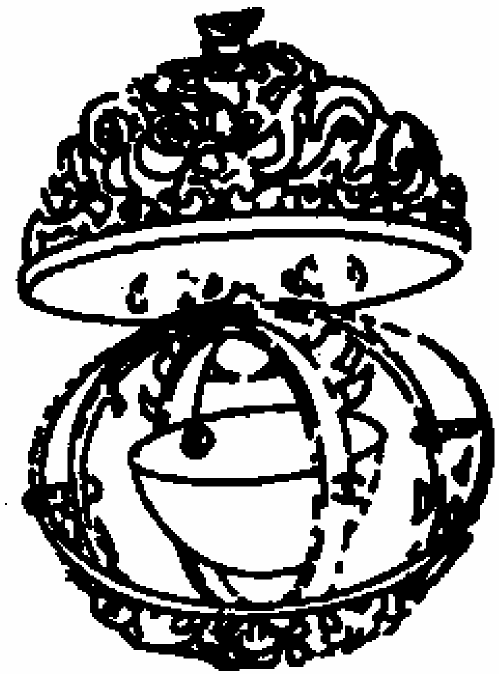
自然界中存在多种守恒定律

- 动量守恒定律
- 电荷守恒定律
- 能量守恒定律
- 质量守恒定律
- 角动量守恒定律
- 宇称守恒定律等

角动量守恒定律在技术中的应用



惯性导航仪（陀螺）



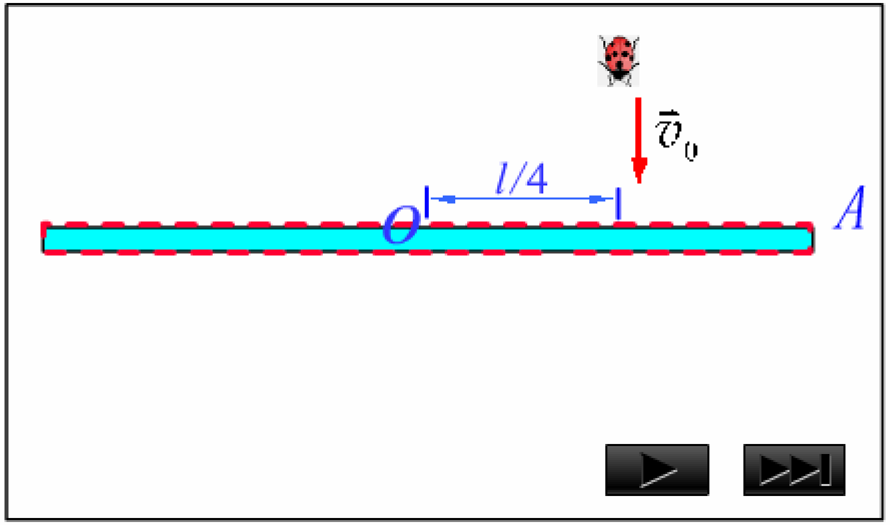
被 中 香 炉

例3 质量很小长度为l 的均匀细杆,可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动.当细杆静止于水平位置时,有一只小虫以速率v_0 垂直落在距点O为 $l/4$ 处,并背离点O 向细杆的端点A 爬行.设小虫与细杆的质量均为m.问:欲使细杆以恒定的角速度转动,小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

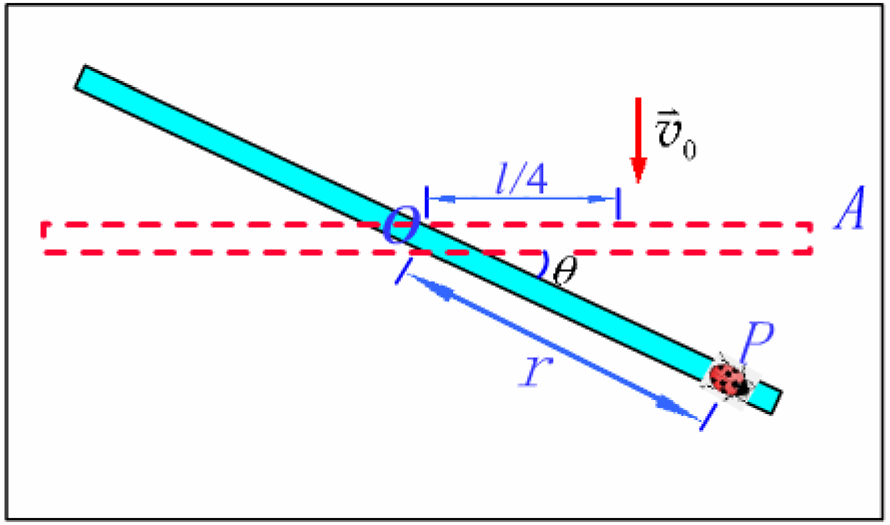
解 小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



$$\omega = \frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



由角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

即

$$mgr\cos\theta = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{12}ml^2 + mr^2\right) = 2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta = \omega t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7lg}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

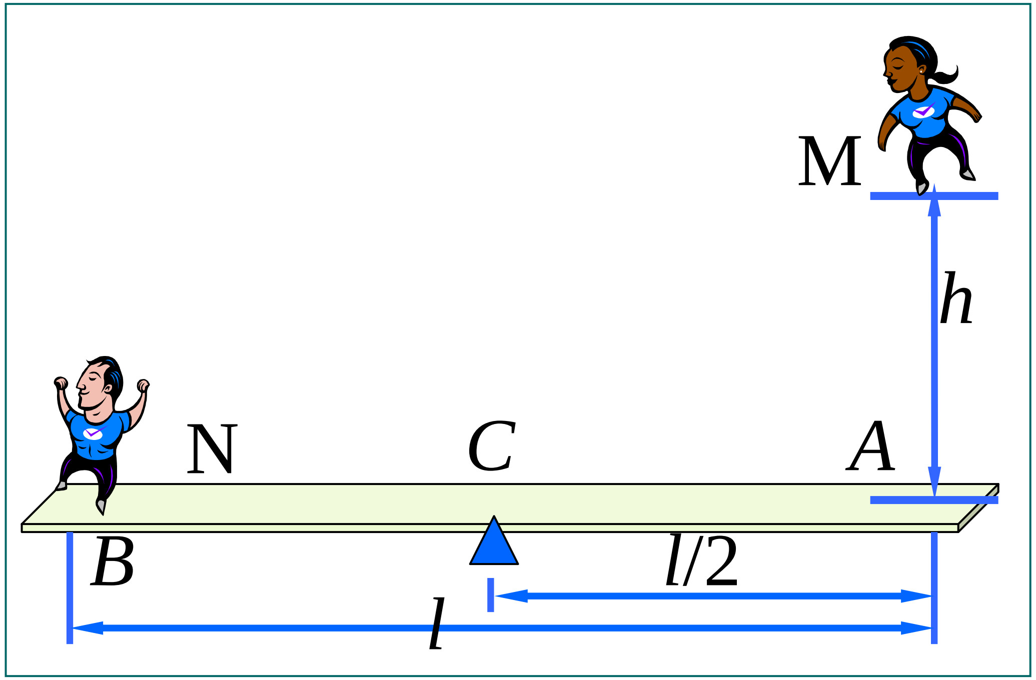
例4　一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端A,并把跷板另一端的演员N 弹了起来.设跷板是匀质的,长度为l,质量为 m',跷板可绕中部支撑点C在竖直平面内转动,演员的质量均为m.假定演员M落在跷板上,与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.问演员N可弹起多高?

解　碰撞前 M 落在A点的速度

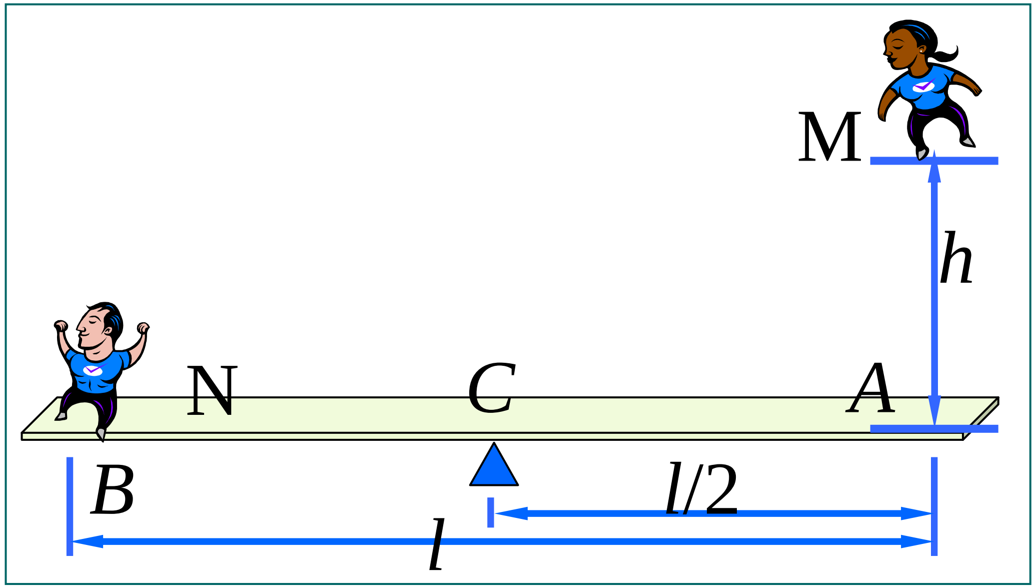
$$v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$$

碰撞后的瞬间,M、N具有相同的线速度

$$u=\frac{l}{2}\omega$$



$$v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$$



$$u=\frac{l}{2}\omega$$

把M、N和跷板作为一个系统，角动量守恒

$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^2\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega$$

解得

$$\omega=\frac{mv_{\mathrm{M}}l/2}{m'l^2/12+ml^2/2}=\frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$$

演员 N 以 u 起跳，达到的高度

$$h'=\frac{u^2}{2g}=\frac{l^2\omega^2}{8g}=\left(\frac{3m}{m'+6m}\right)^2h$$