一　等势面（电势图示法）

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面. 为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等.

- 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力做功

$$W_{ab}=q_0(V_a-V_b)=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

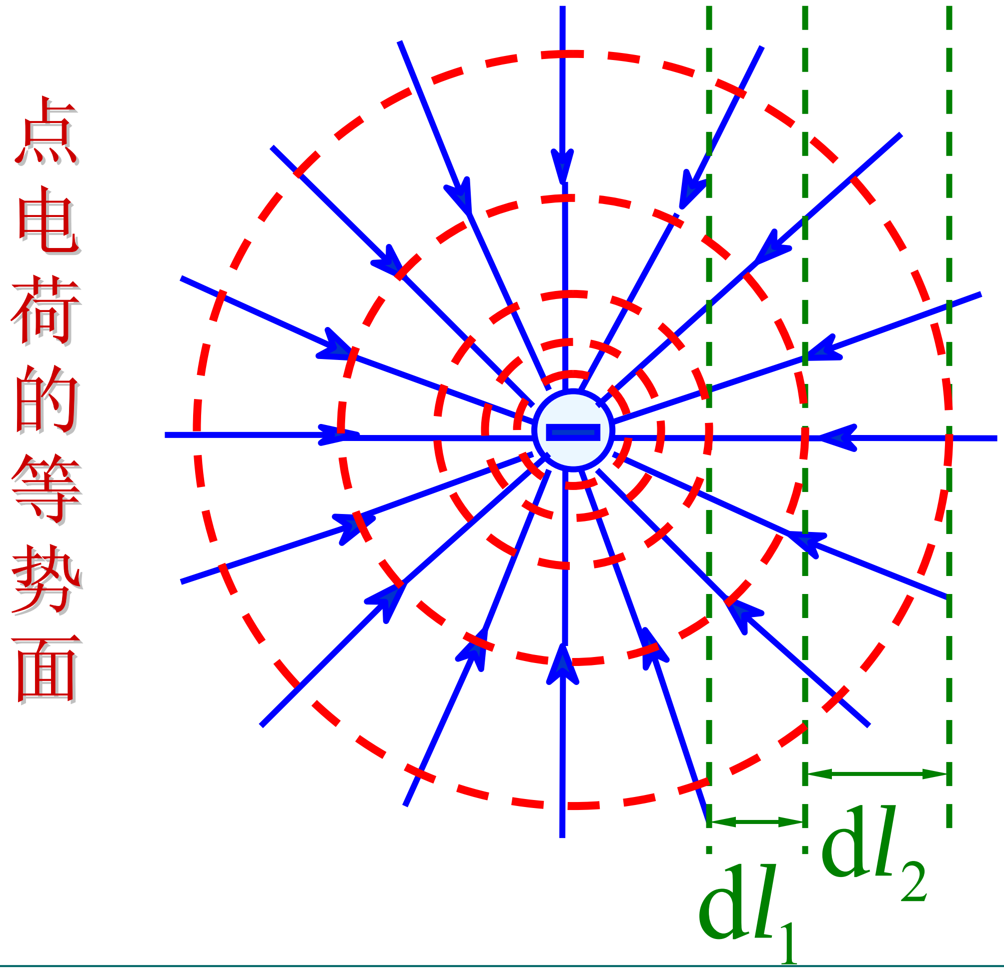
- 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇.

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$q_0\neq 0 \quad \vec{E}\neq 0 \quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

$$\boxed{\therefore \quad \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{l}}$$

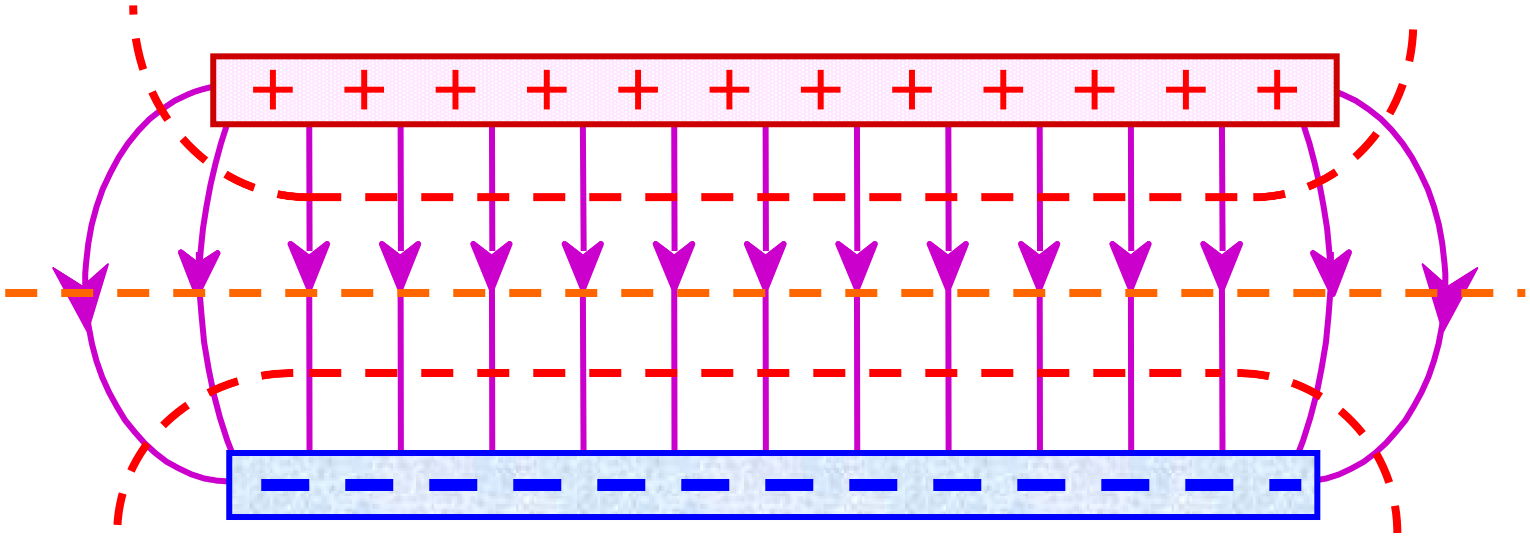
◆ 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小.



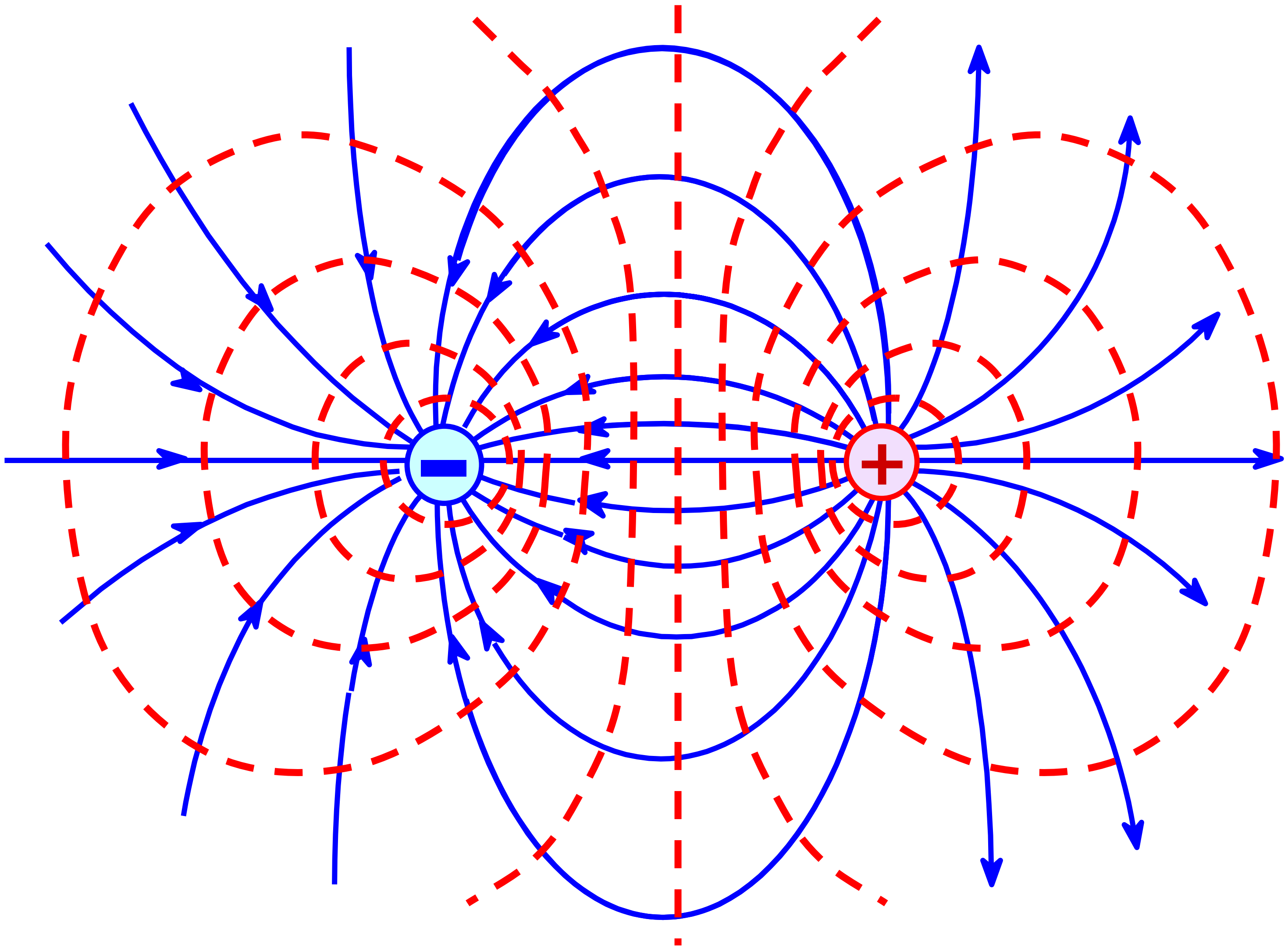
$$\mathrm{d}l_2 > \mathrm{d}l_1$$

$$E_2 < E_1$$

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



二 电场强度与电势梯度

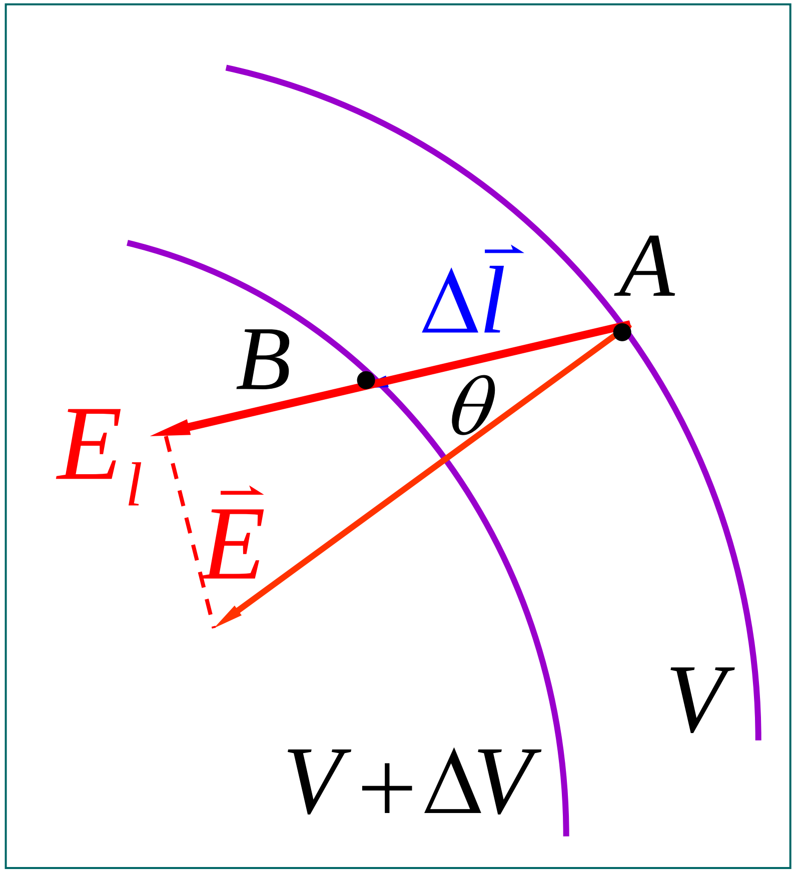
$$U_{AB}=-(V_B-V_A)=\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$$

$$=E\Delta l\cos\theta$$

$$E\cos\theta=E_l$$

$$-\Delta V=E_l\Delta l,\quad E_l=-\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

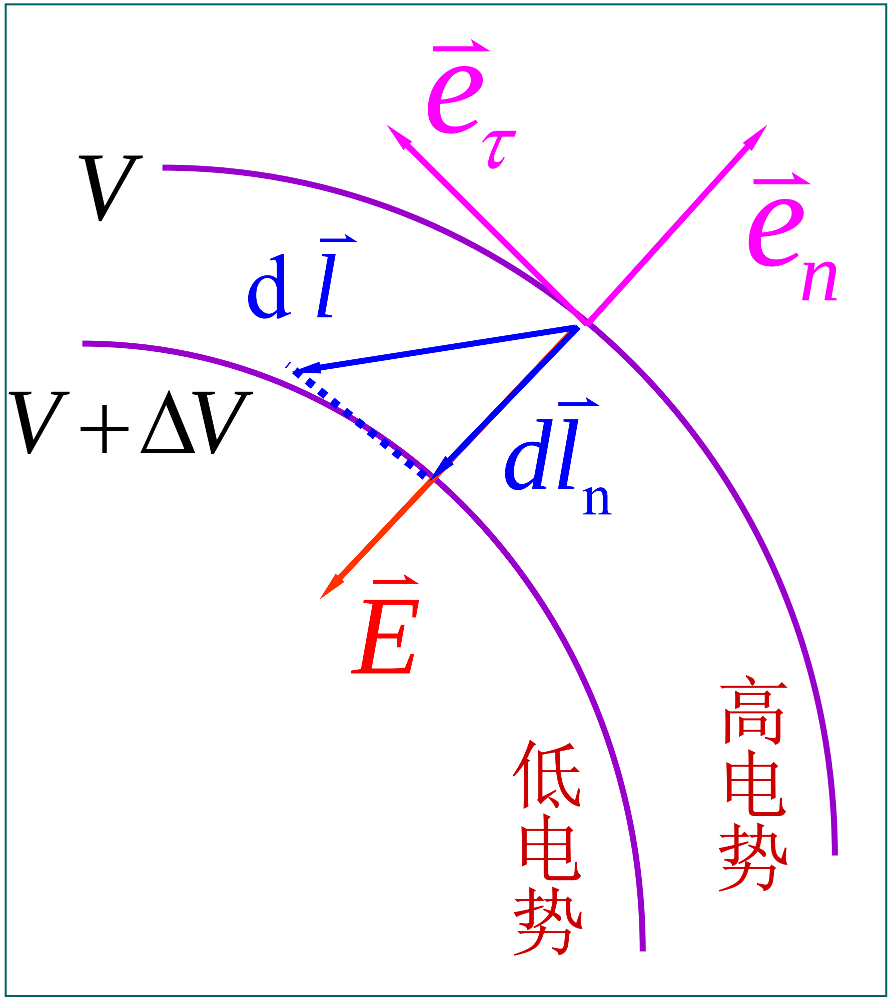
$$E_l=-\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$



电场中某一点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向单位长度上电势变化率的负值.

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} \qquad E_\mathrm{n} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}$$

$$\because \mathrm{d}l > \mathrm{d}l_\mathrm{n} \qquad \therefore E_\mathrm{n} > E_l$$



$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}\vec{e}_\mathrm{n}}$$

大小　$$|\vec{E}| = \left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}\right|$$

方向　与 $\vec{e}_\mathrm{n}$ 相反，由高电势处指向低电势处

物理意义

（1）空间某点电场强度的大小取决于该点领域内电势 V 的空间变化率.

（2）电场强度的方向恒指向电势降落的方向.

讨论

- 直角坐标系中

$$\vec{E}=-(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})=-\mathrm{grad}V$$

$$\vec{E}=-\nabla V$$ （电势梯度）

- 为求电场强度 $\vec{E}$ 提供了一种新的途径

求 $\vec{E}$ 的三种方法
- 利用电场强度叠加原理
- 利用高斯定理
- 利用电势与电场强度的关系

三 电场线和等势面的关系

1）电场线与等势面处处正交.

（等势面上移动电荷，电场力不做功.）

2）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小.

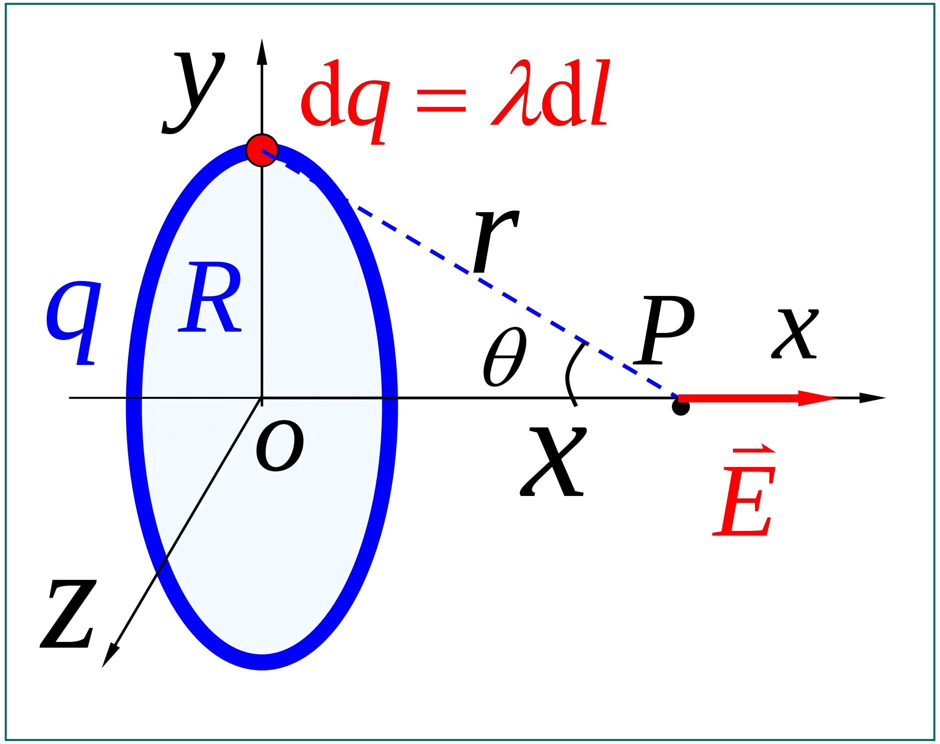
讨论

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

2） $V=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗 ？

3） $\vec{E}$ 相等的地方，V 一定相等吗？等势面上 $\vec{E}$ 一定相等吗 ？

例1　求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度.



解　$\vec{E} = -\nabla V$

$$V = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

例2 求电偶极子电场中任意一点 A 的电势和电场强度.

解

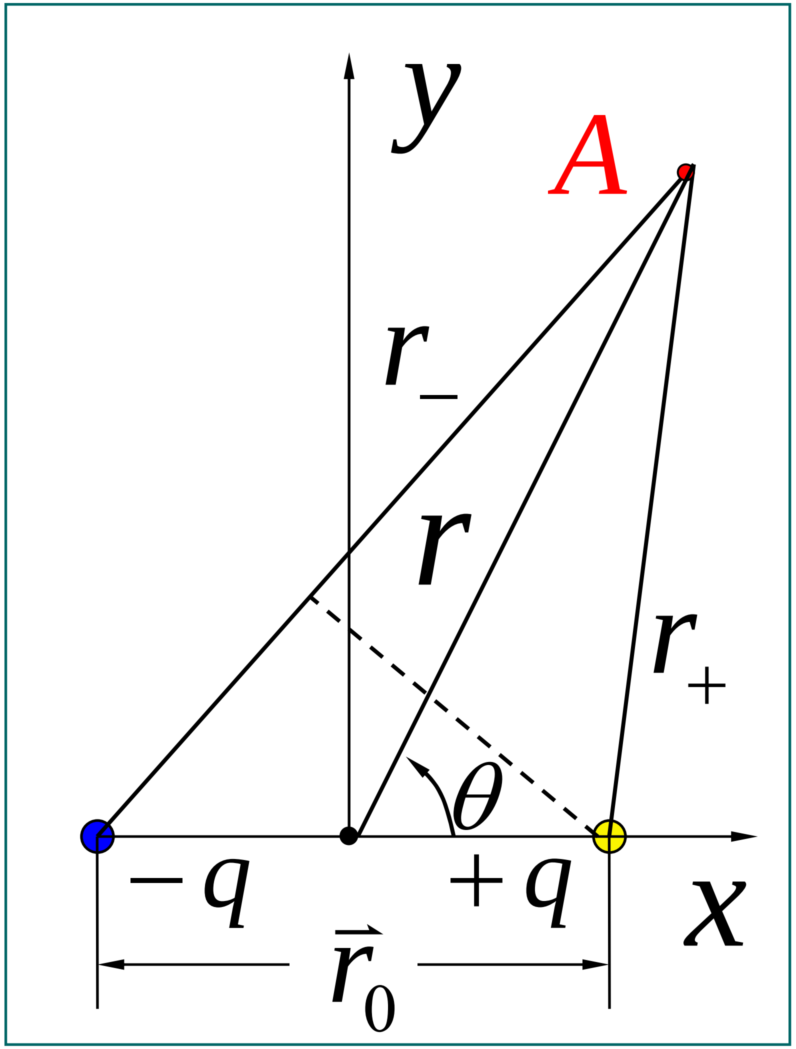
$$\begin{cases} V_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_+} \\ V_- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_-} \end{cases}$$

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$\because r_0 << r$$

$$\therefore r_- - r_+ \approx r_0 \cos\theta$$

$$r_- r_+ \approx r^2$$

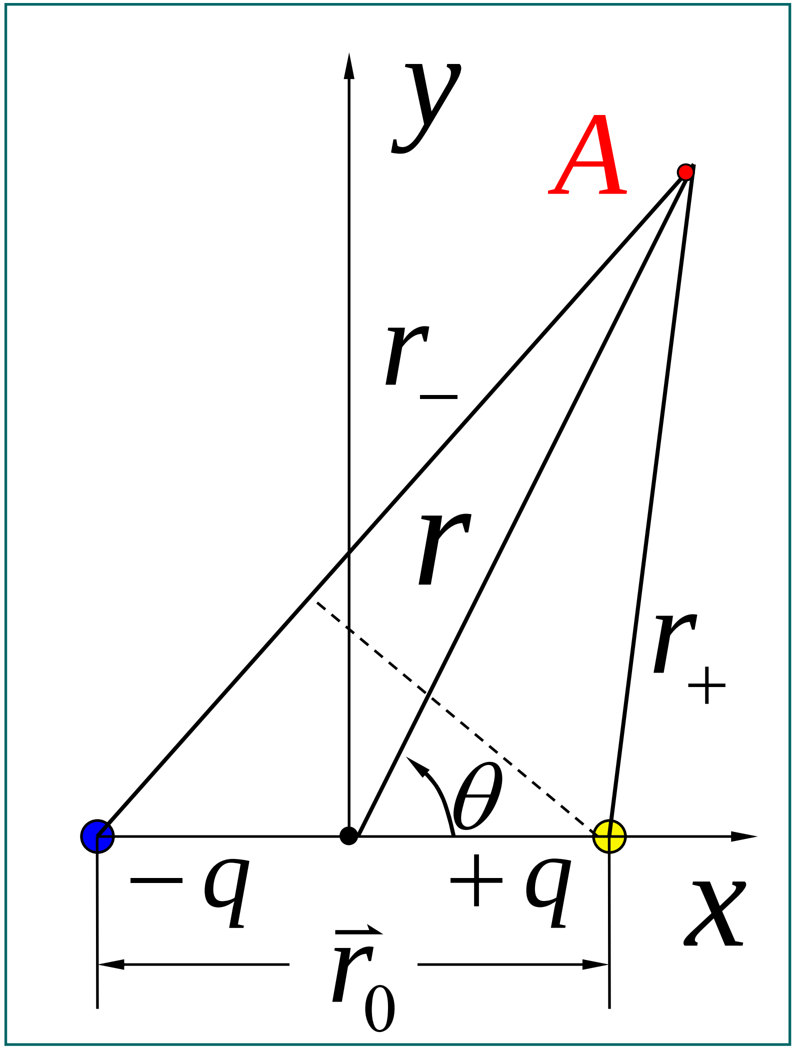


$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{r_0 \cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & V \approx \dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\dfrac{p}{r^2} \\ \theta = \pi & V \approx -\dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\dfrac{p}{r^2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & V = 0 \end{cases}$$



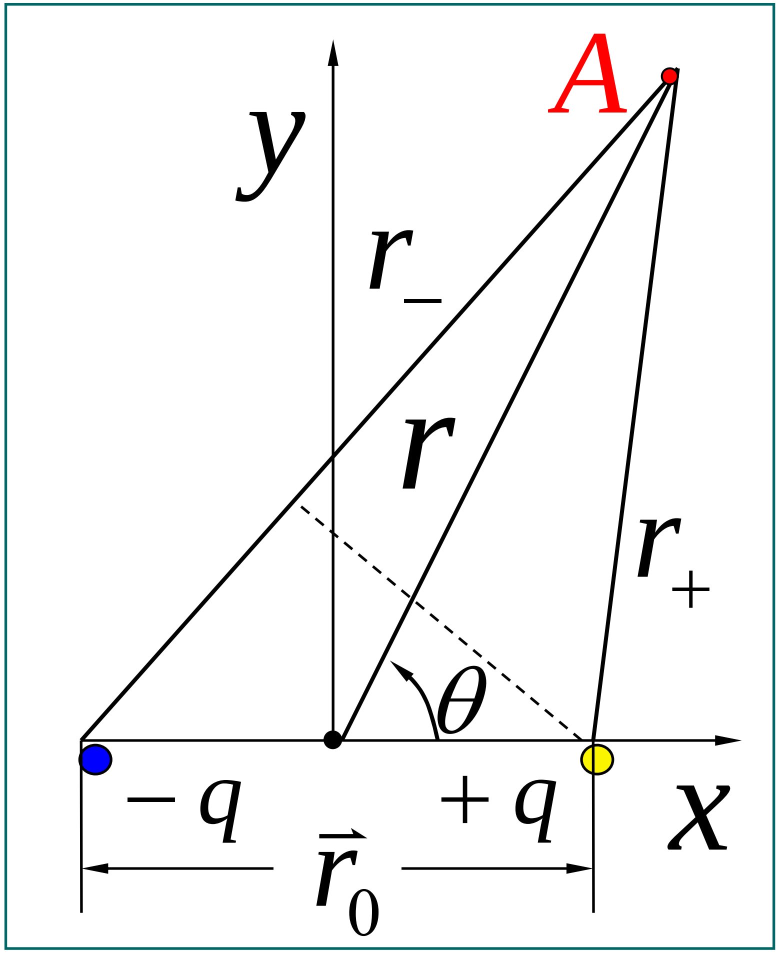
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

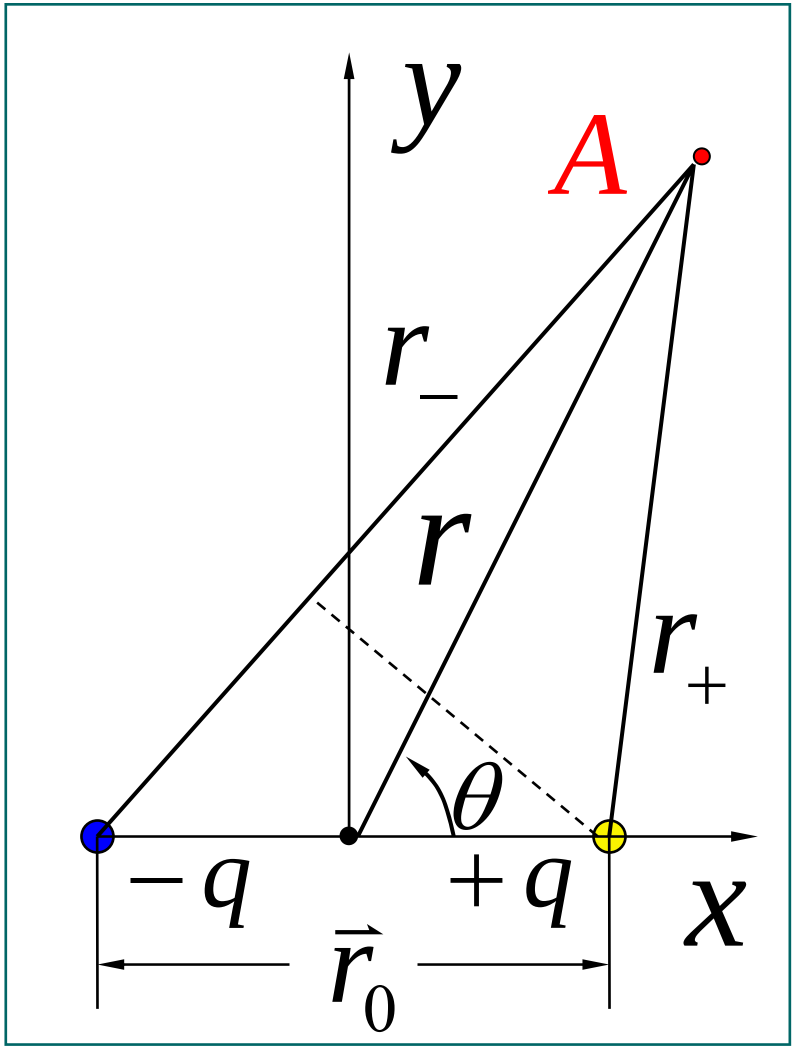


$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \\ E_y = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \end{cases}$$

$$E = \sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2}$$

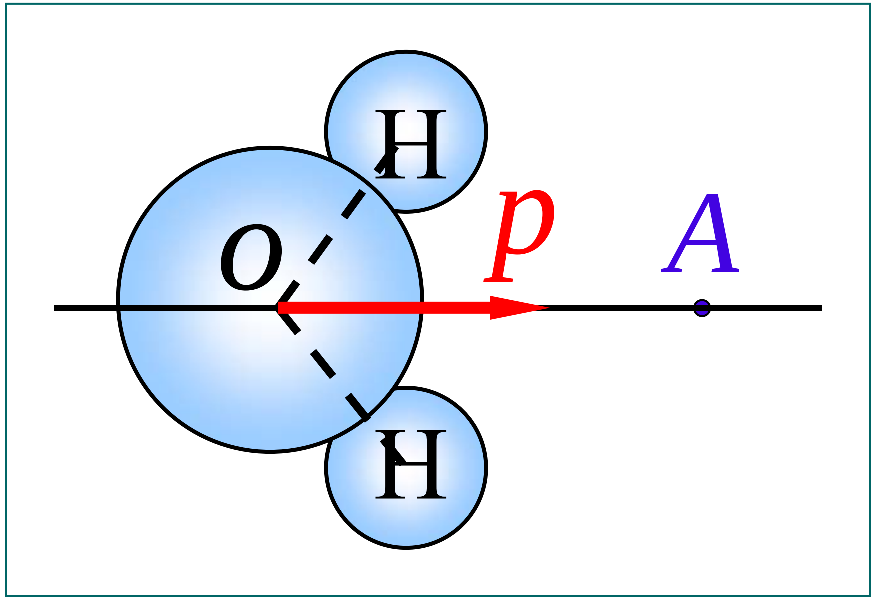
$$\begin{cases} y=0 \quad E = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^3} \\ x=0 \quad E = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{y^3} \end{cases}$$



例3　如图所示，水分子可以近似看作为电偶极矩 $p = 6.2\times10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m}$ 的电偶极子．有一电子放在电偶极矩的延长线、距电偶极矩中心 O 为 $5\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ 的点 A 上．求电子的势能和作用在电子上的力.

解　$E_{\mathrm{p}} = -eV$

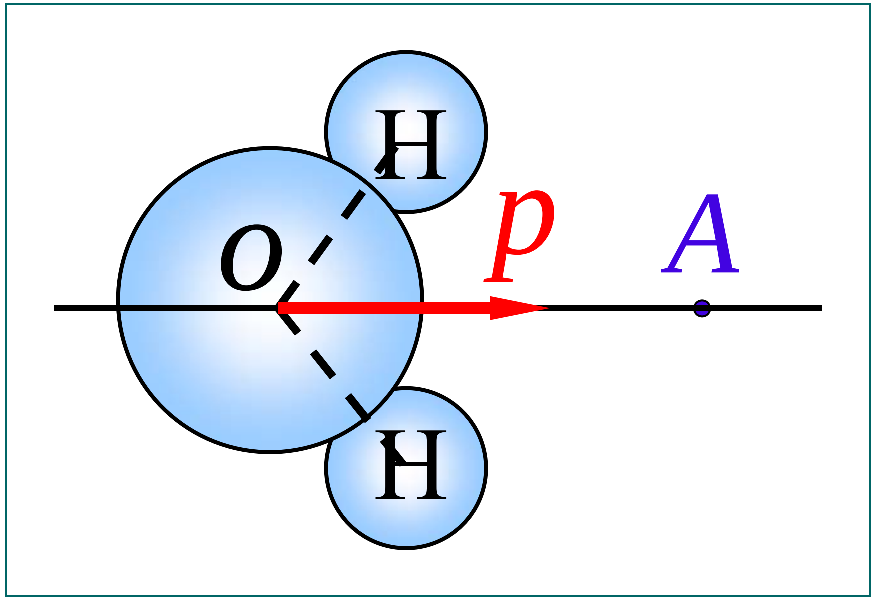
$$= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$$



$$e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$\left|E_{\mathrm{p}}\right| = 3.57\times10^{-20}\,\mathrm{J}$$

与气体分子热运动动能量比较



$$T=\frac{|E_{\mathrm{p}}|}{k}=\frac{3.57\times10^{-20}}{1.38\times10^{-23}}\mathrm{K}$$

$$=2.59\times10^{3}\mathrm{K}$$

$$|F|=eE=\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}=1.43\times10^{-10}\mathrm{N}$$

$$a=\frac{F}{m}=\frac{1.43\times10^{-10}}{9.11\times10^{-31}}\mathrm{m\cdot s^{-2}}=1.57\times10^{20}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$v=at=1.57\times10^{20}\times10^{-14}\mathrm{m\cdot s^{-1}}=1.57\times10^{6}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$