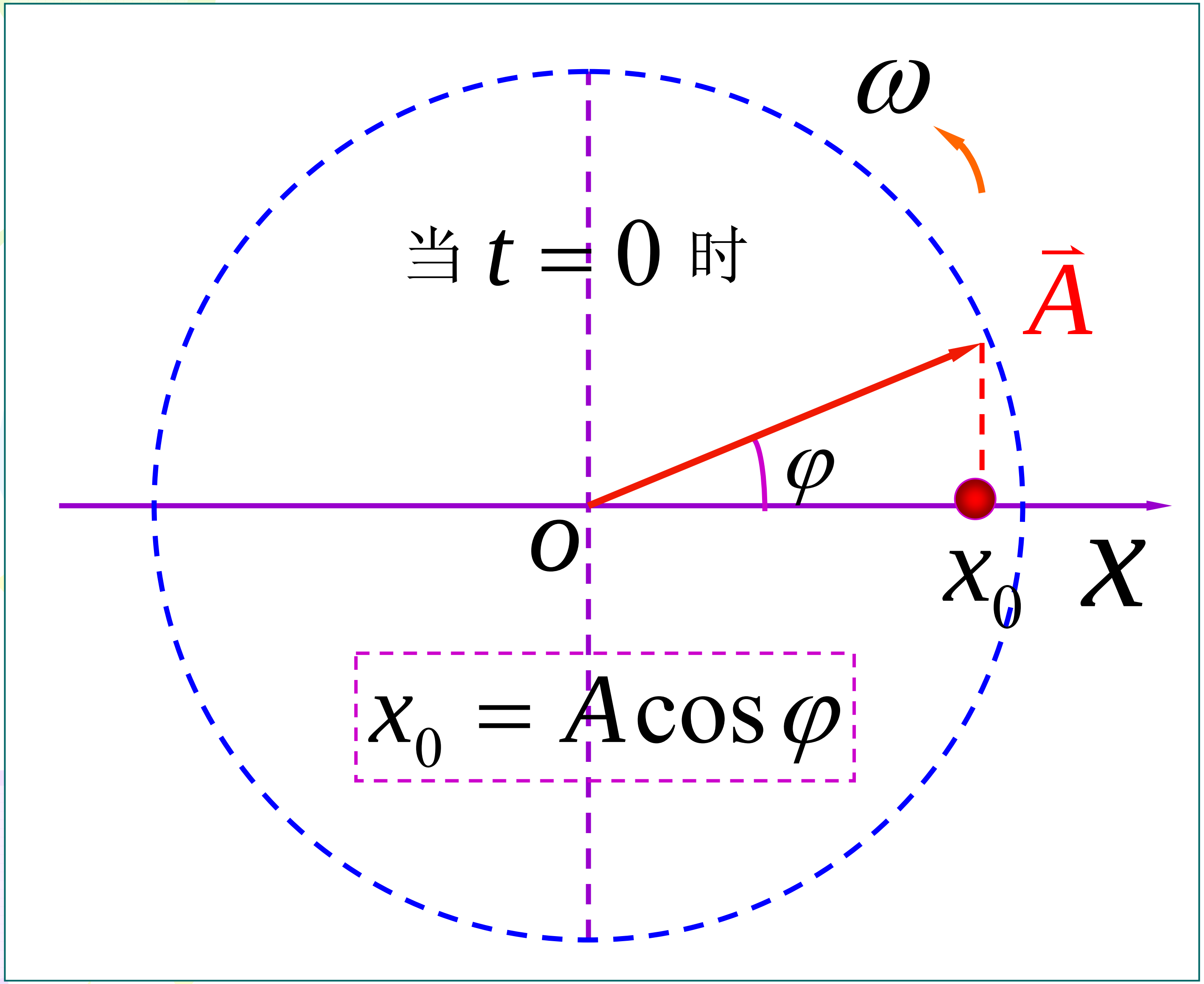
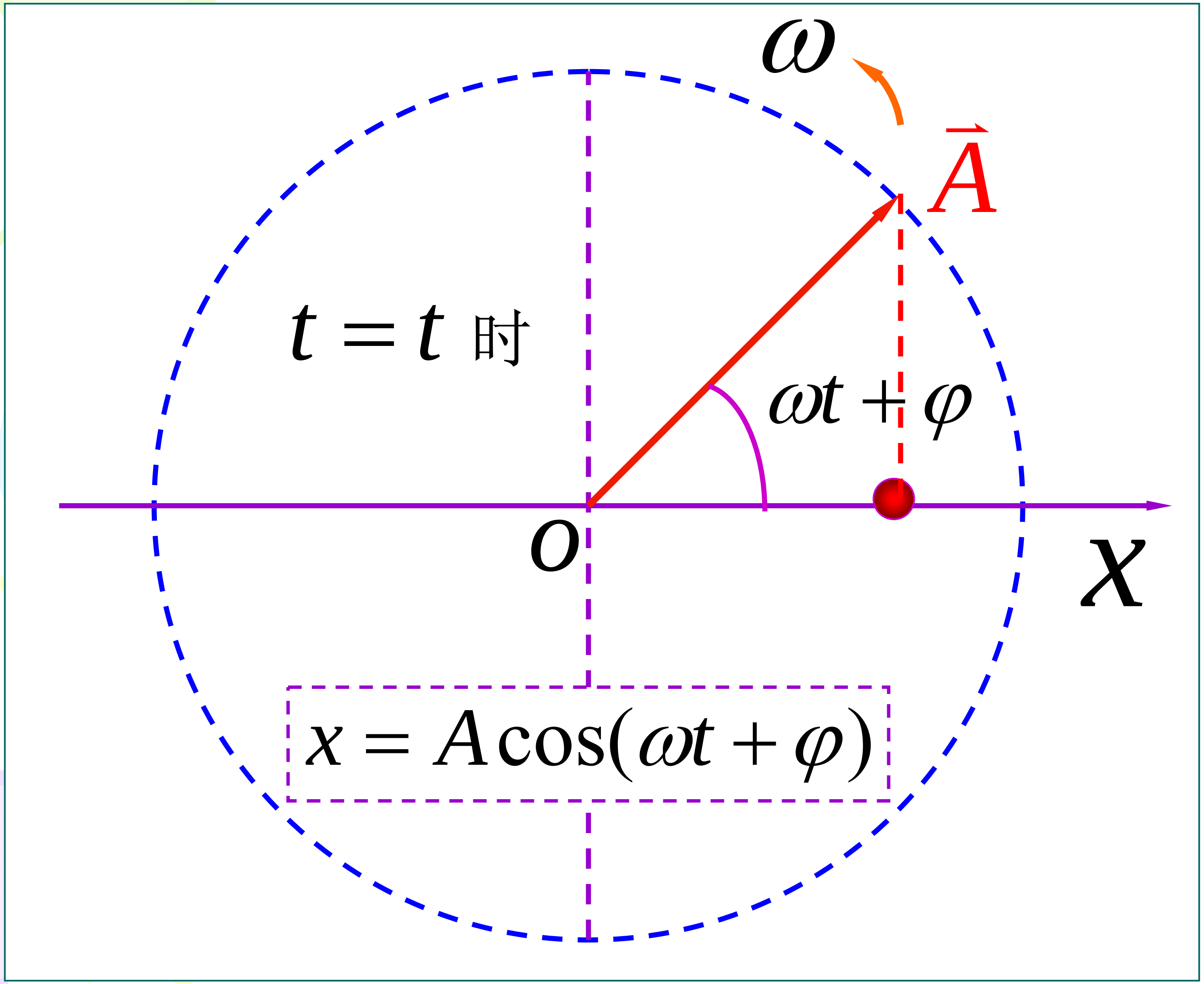


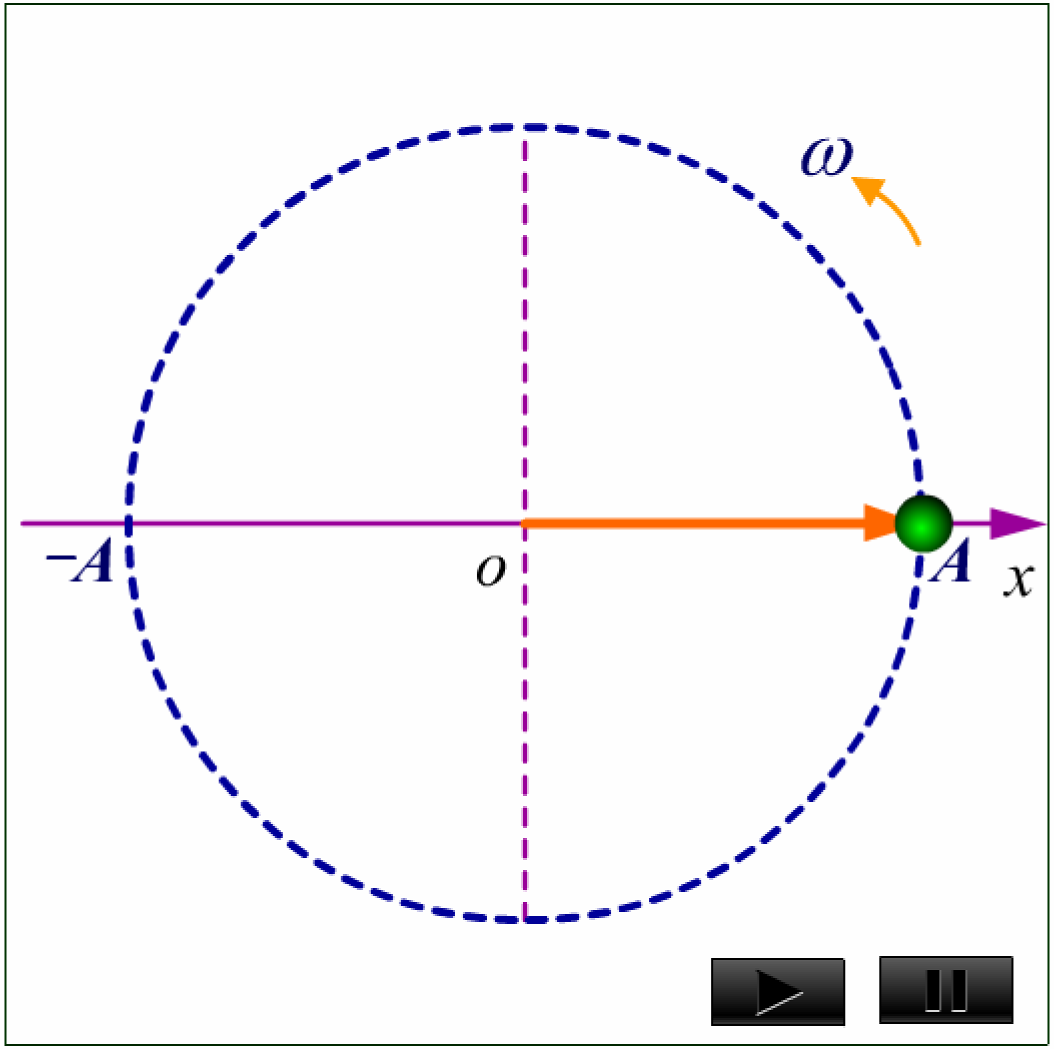

以 $o$ 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 $X$ 轴上的投影点的运动为简谐运动.

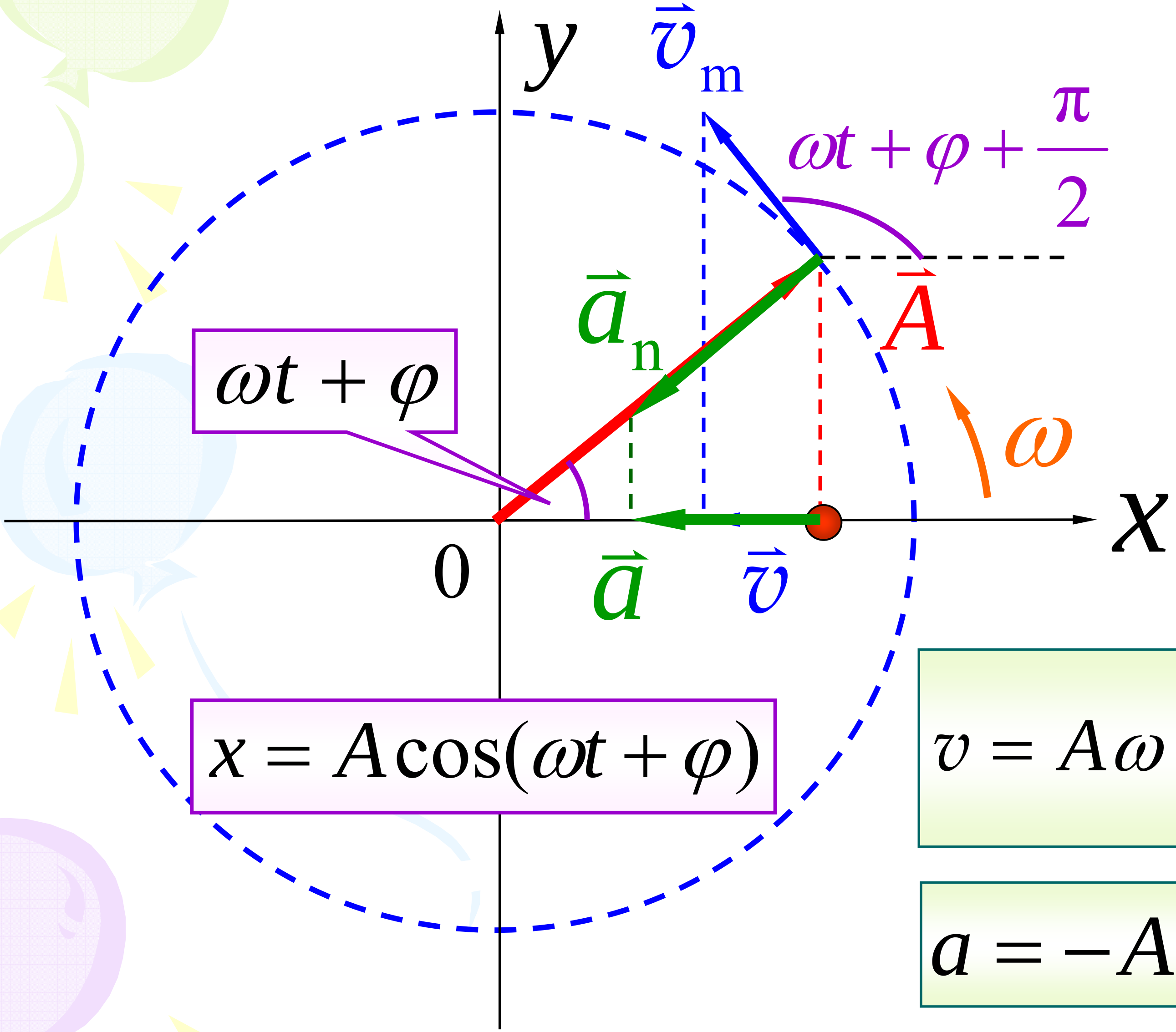



以 $o$ 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 $x$ 轴上的投影点的运动为简谐运动.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在$X$轴上的投影点的运动为简谐运动.






$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v_{\mathrm{m}} = A\omega$$

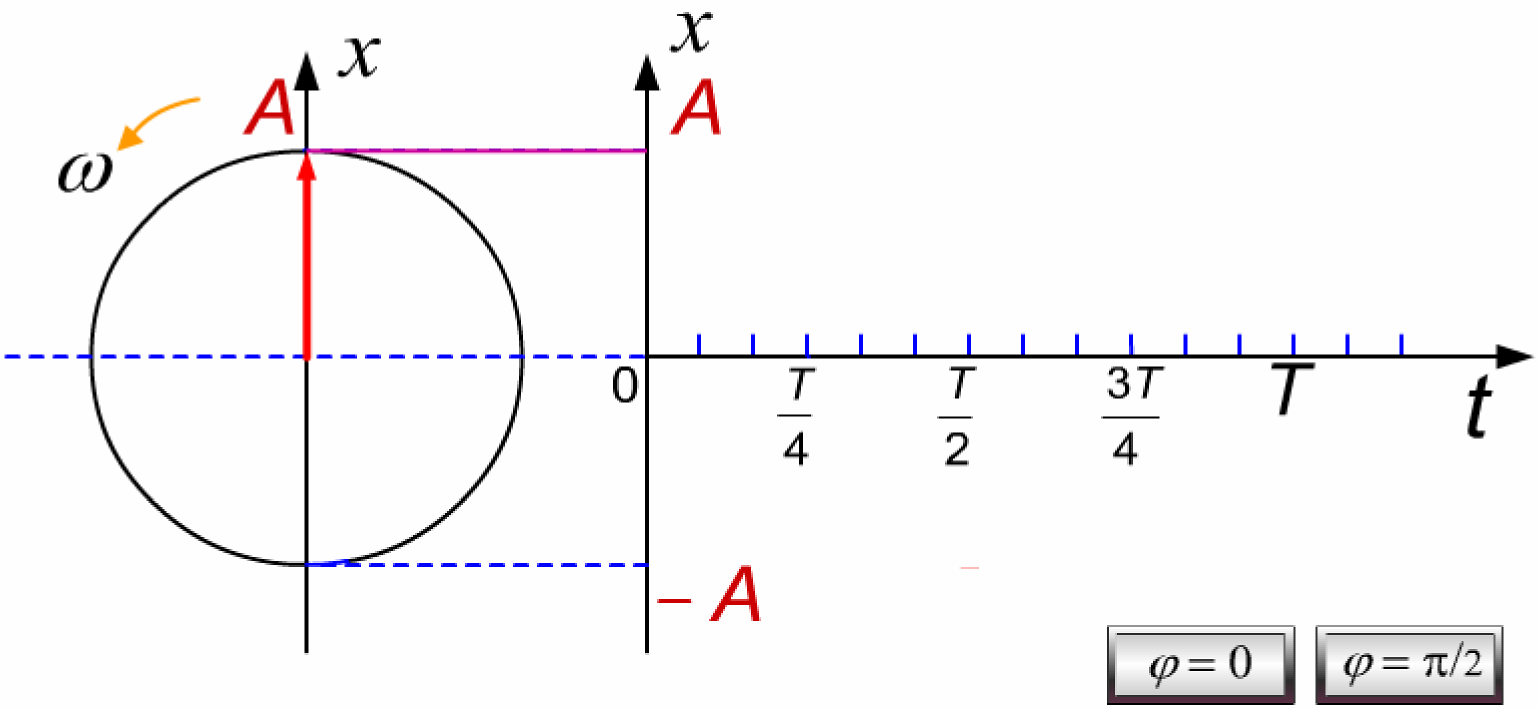
$$a_{\mathrm{n}} = A\omega^2$$

$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

## 用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$




$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

讨论

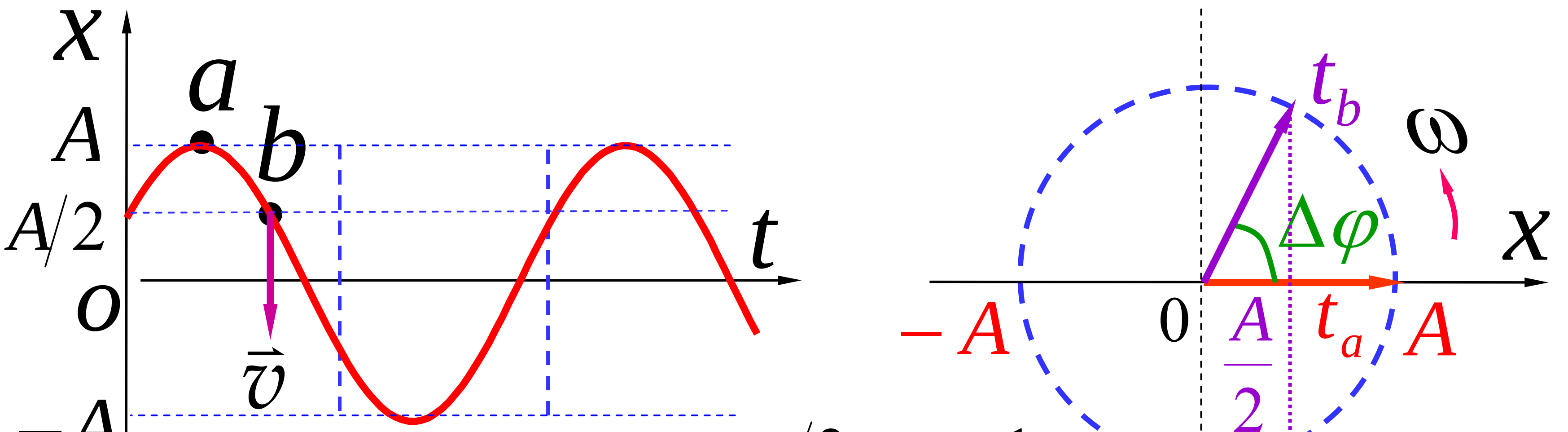
➢ 相位差：表示两个相位之差 .

1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)$

$$x=A\cos(\omega t_1+\varphi)$$

$$x=A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{\Delta\varphi}{\omega}$$




$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3} \qquad \Delta t=\frac{\pi/3}{2\pi}T=\frac{1}{6}T$$

2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异.（解决振动合成问题）

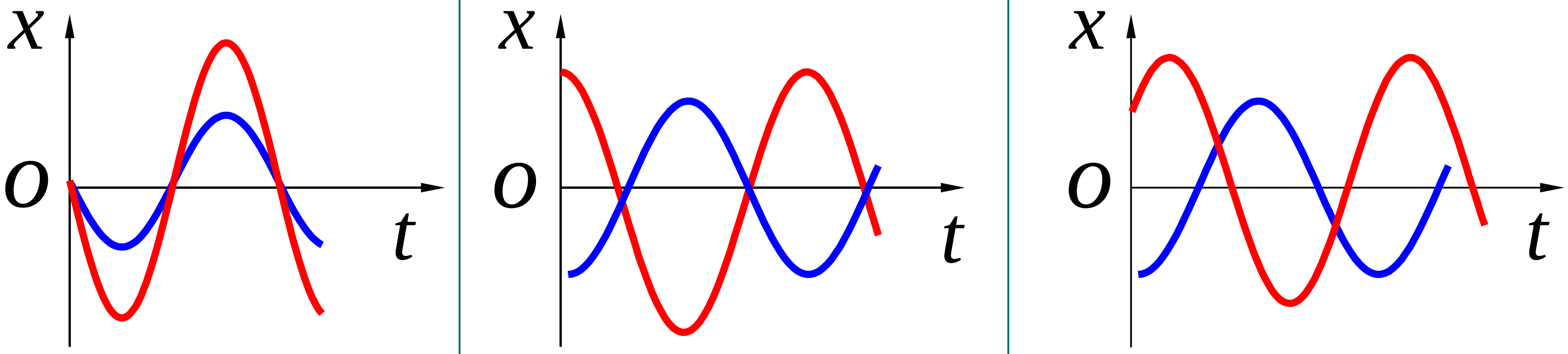
$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) \qquad \boxed{\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1}$$

$\Delta\varphi = 0$ 同步

$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相

$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases}\text{超前}\\ \text{落后}\end{cases}$

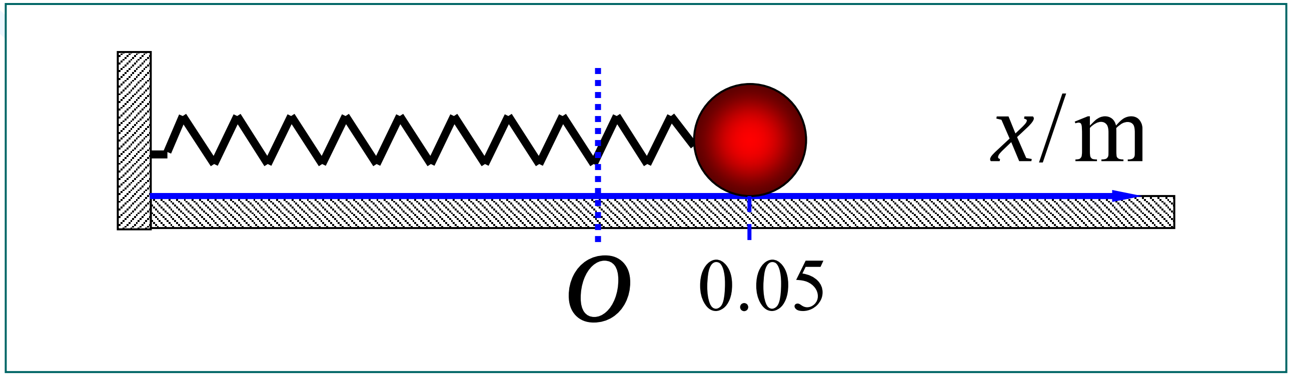


例1 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k=0.72\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$，物体的质量 $m=20\mathrm{g}$.

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

（3）如果物体在 $x=0.05\mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，求其运动方程.

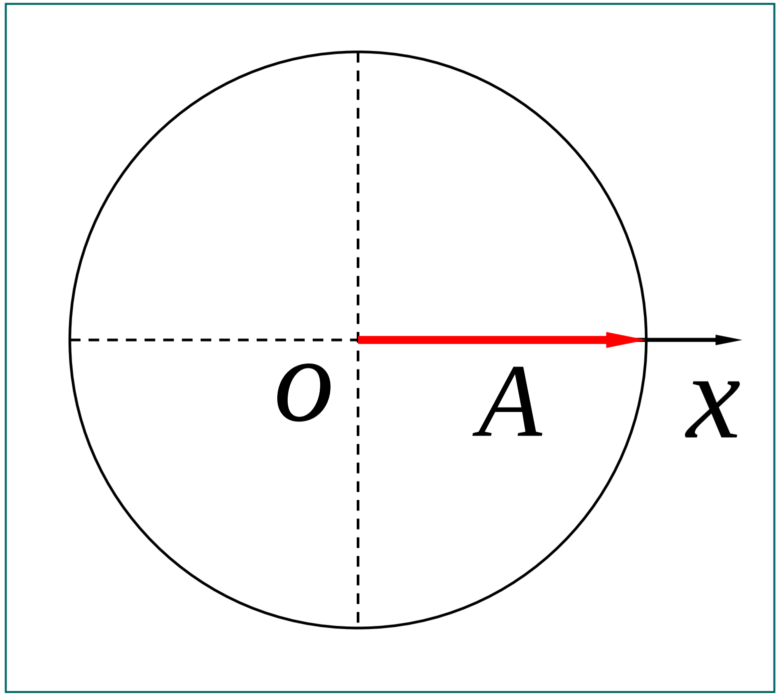


解　（1）$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}}{0.02\mathrm{kg}}}=6.0\mathrm{s}^{-1}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=0.05\mathrm{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}=0$$

$$\varphi=0\ 或\ \pi$$




由旋转矢量图可知 $\varphi=0$

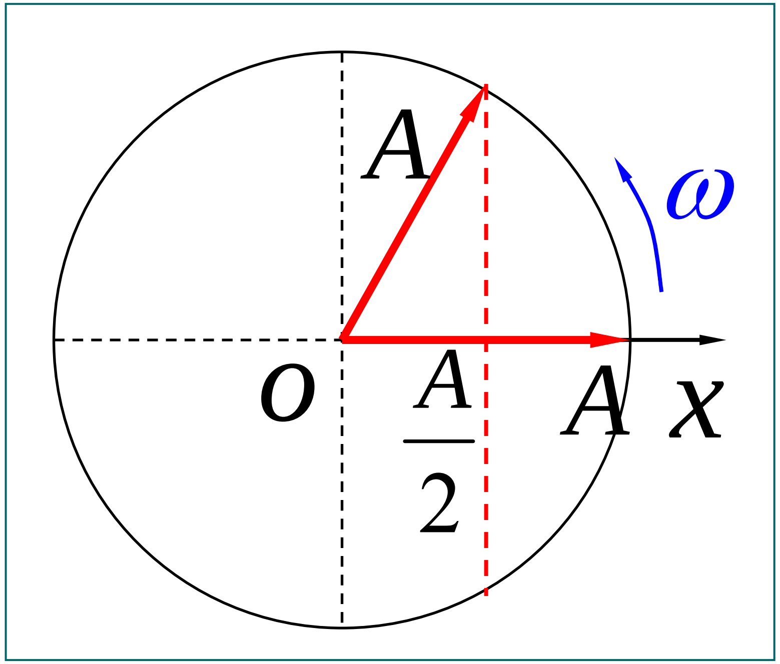
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.05\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s}^{-1})t]$$

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

解　$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t)$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$




由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

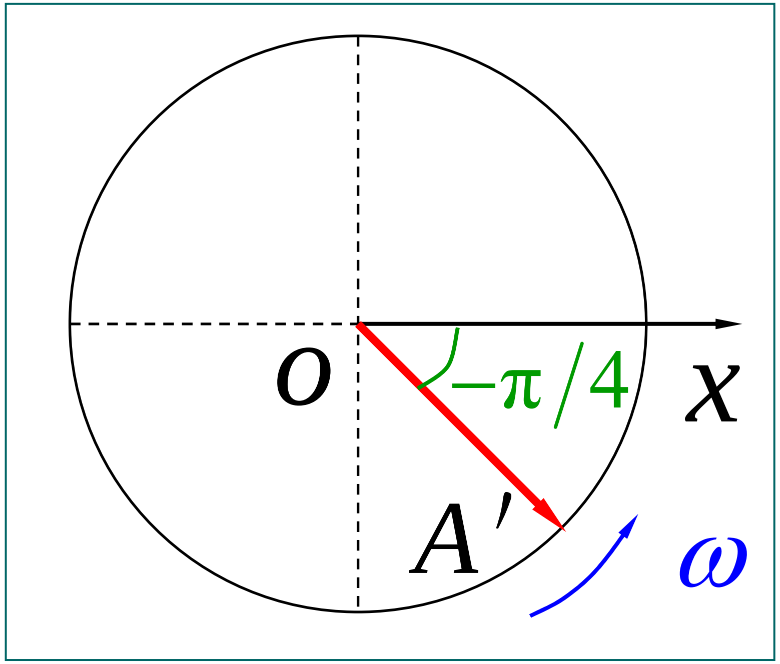
$$= -0.26\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ （负号表示速度沿 $Ox$ 轴负方向）

（3）如果物体在 $x=0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，求其运动方程.

解 $A'=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}=0.0707\text{m}$

$$\tan\varphi'=\frac{-v_0}{\omega x_0}=-1$$

$$\varphi'=-\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$

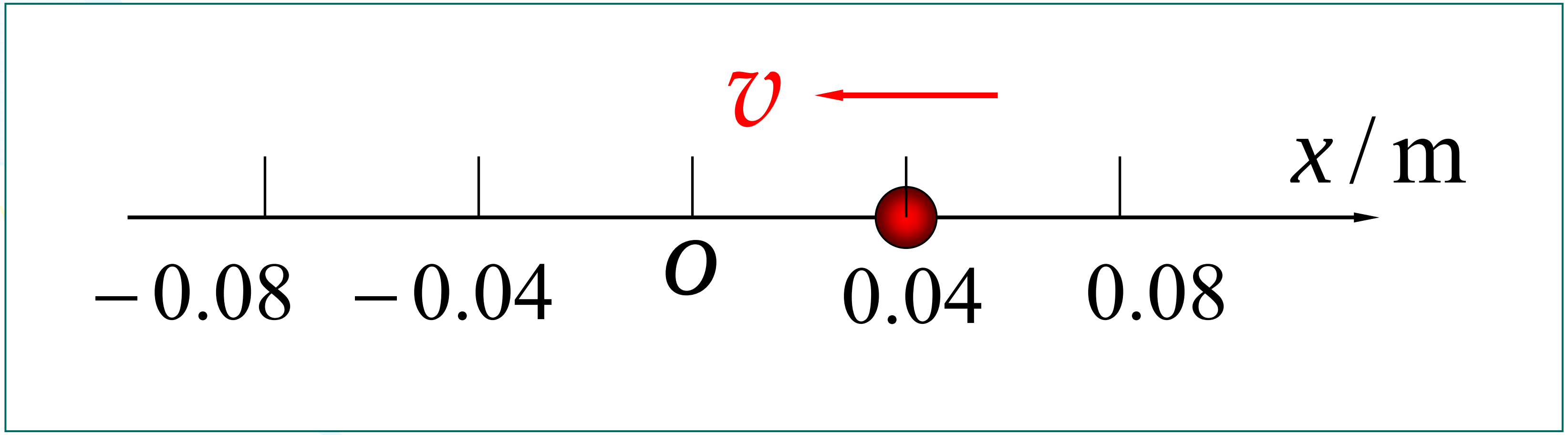



因为 $v_0>0$，由旋转矢量图可知 $\varphi'=-\pi/4$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.0707\text{m})\cos[(6.0\text{s}^{-1})t-\frac{\pi}{4}]$$

例2 一质量为 0.01kg的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m，周期为 4s，起始时刻物体在 $x=0.04\text{m}$ 处，向 $Ox$ 轴负方向运动（如图）. 试求

（1）$t=1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；



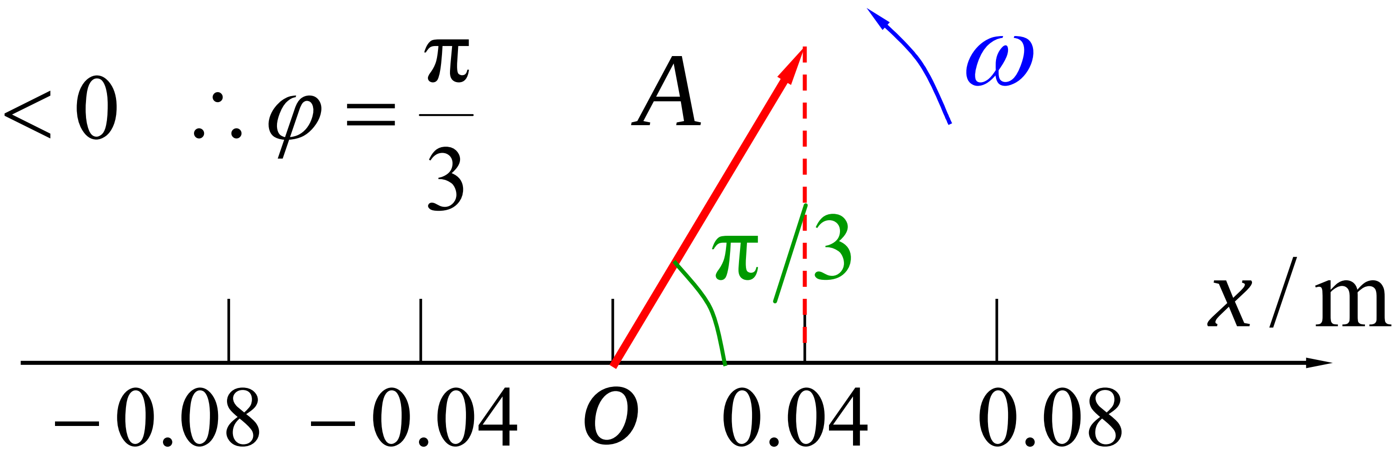

解 $A=0.08\text{m}$ $\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

$$A = 0.08\text{m} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$

$t = 0, x = 0.04\text{m}$ 代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

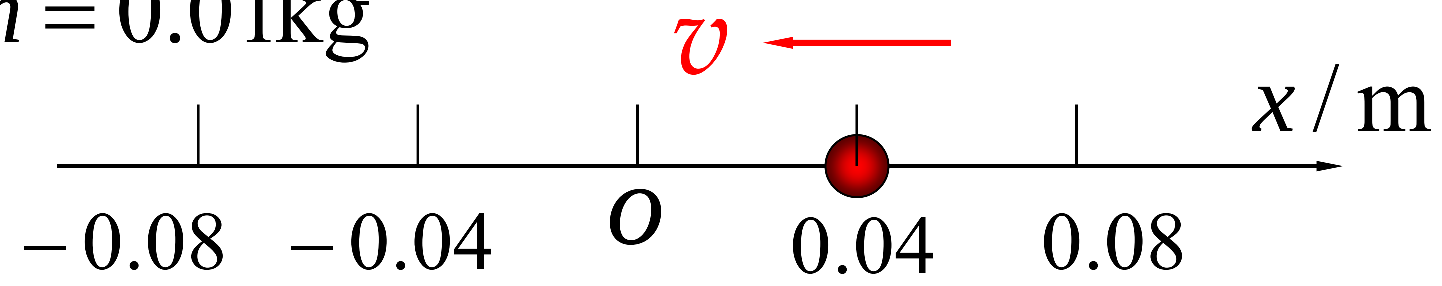
$$0.04\text{m} = (0.08\text{m})\cos\varphi \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$




$$x = (0.08\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$

$m = 0.01\text{kg}$



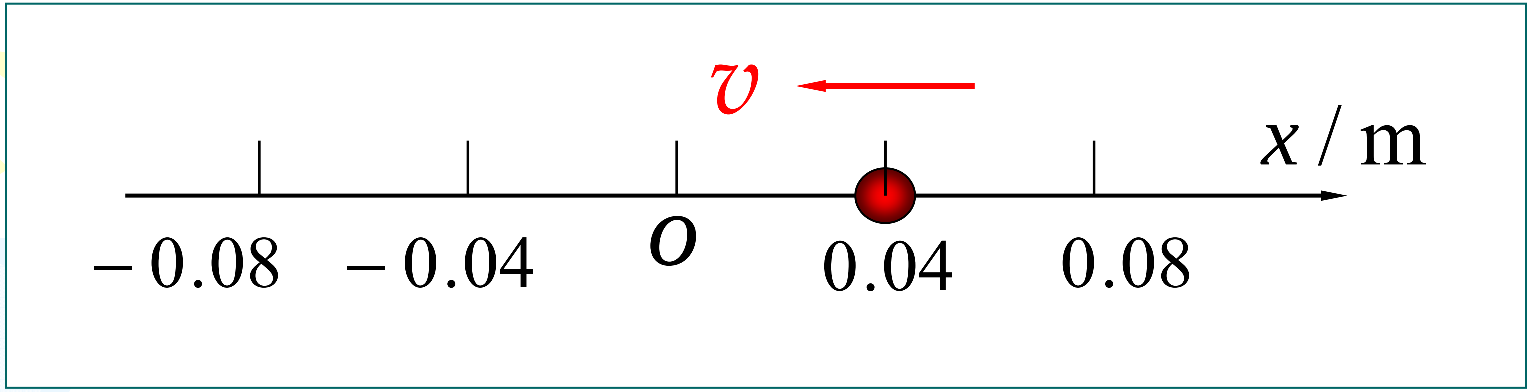

$$x = (0.08\,\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$

$t = 1.0\text{s}$ 代入上式得　　$x = -0.069\text{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x$$

$$= -(0.01\text{kg})(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})^2(-0.069\text{m}) = 1.70\times10^{-3}\,\text{N}$$

（2） 由起始位置运动到 $x = -0.04\mathrm{m}$ 处所需要的最短时间.

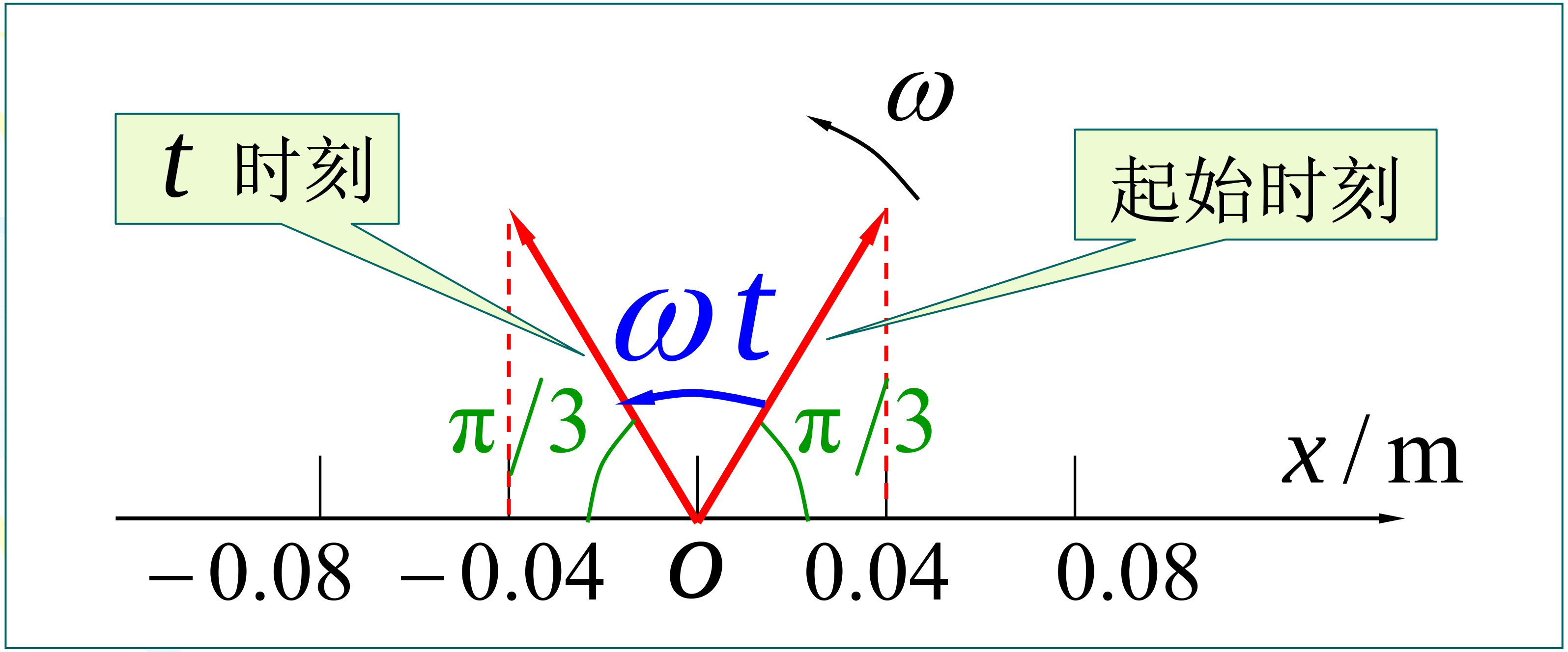



法一 设由起始位置运动到 $x = -0.04\mathrm{m}$ 处所需要的最短时间为 $t$

$$-0.04\mathrm{m} = (0.08\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$

$$t = \frac{\arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2}\mathrm{s} = \frac{2}{3}\mathrm{s} = 0.667\mathrm{s}$$

解法二




$$\omega t=\frac{\pi}{3}\qquad \omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1}\qquad t=\frac{2}{3}\mathrm{s}=0.667\mathrm{s}$$