◆ 以弹簧振子为例

$$F=-kx \quad \begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

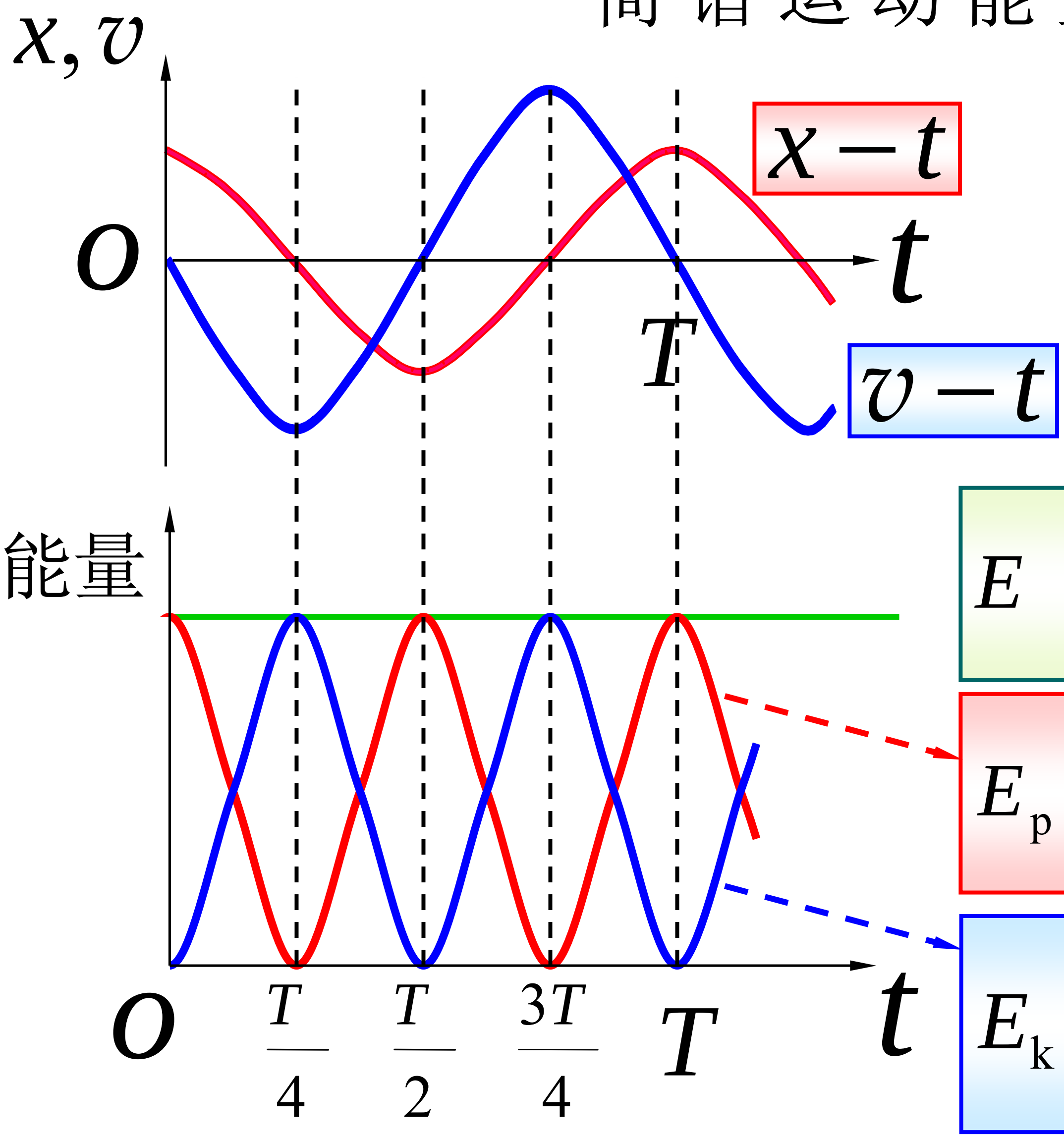
$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2=k/m$$

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2\propto A^2$$（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

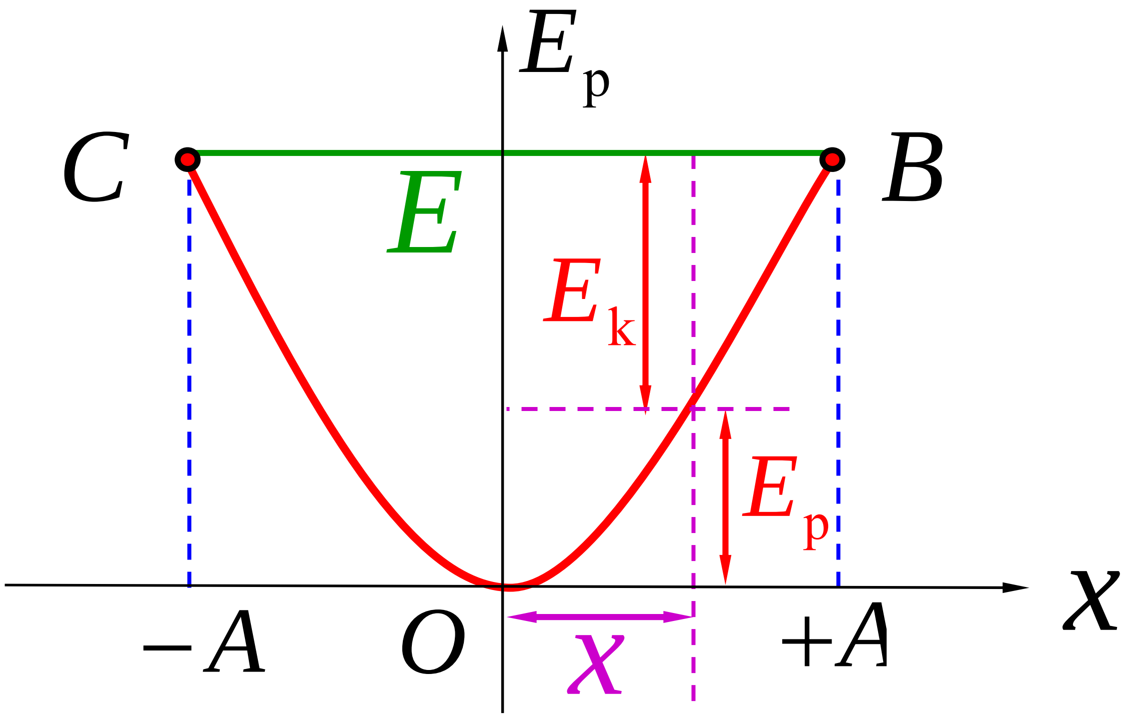
$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E=\frac{1}{2}kA^{2}$$

简谐运动能量守恒，振幅不变

简谐运动势能曲线



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

例　质量为 0.10kg 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

解　（1）　$a_{max}=A\omega^2$　　$\omega=\sqrt{\dfrac{a_{max}}{A}}=20\mathrm{s}^{-1}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\mathrm{s}$$

（2） $E_{\mathrm{k,max}}=\frac{1}{2}mv_{\max}^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $E=E_{\mathrm{k,max}}=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}}=1.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$

$$x^{2}=\frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^{2}}=0.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}^{2}$$

$$x=\pm0.707\,\mathrm{cm}$$