一 平面简谐波的波函数

介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数.

$$y = y(x,t)$$

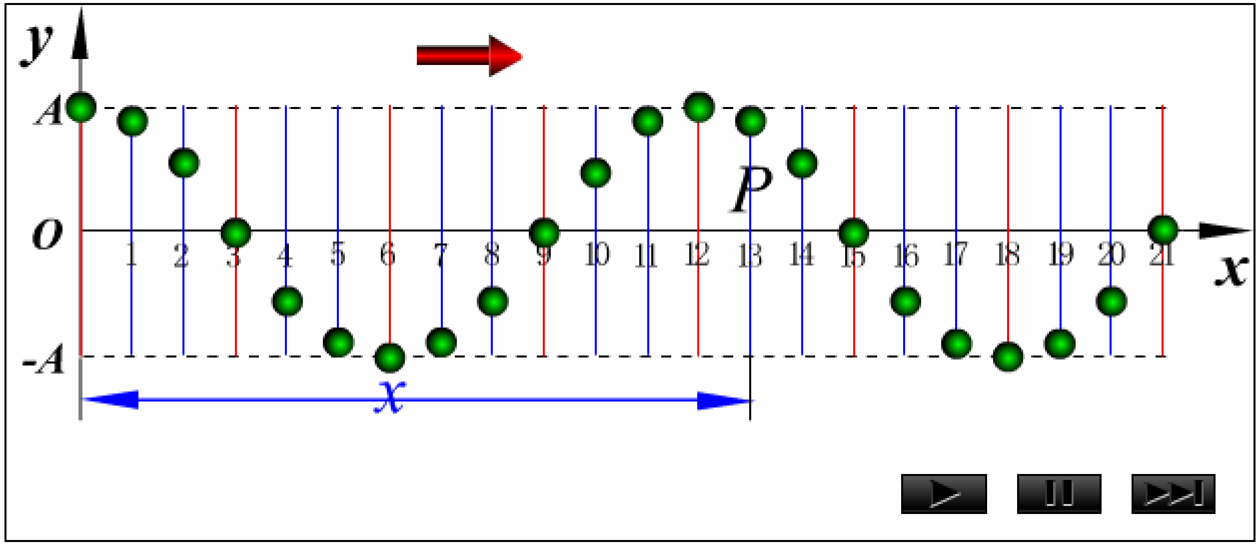
各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

- 简谐波：在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波.
- 平面简谐波：波面为平面的简谐波.

以速度u沿x轴正向传播的平面简谐波．令原点O的初相为零，其振动方程

$$y_O = A\cos\omega t$$



时间推迟方法

点O的振动状态 $y_O = A\cos\omega t$

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

点P

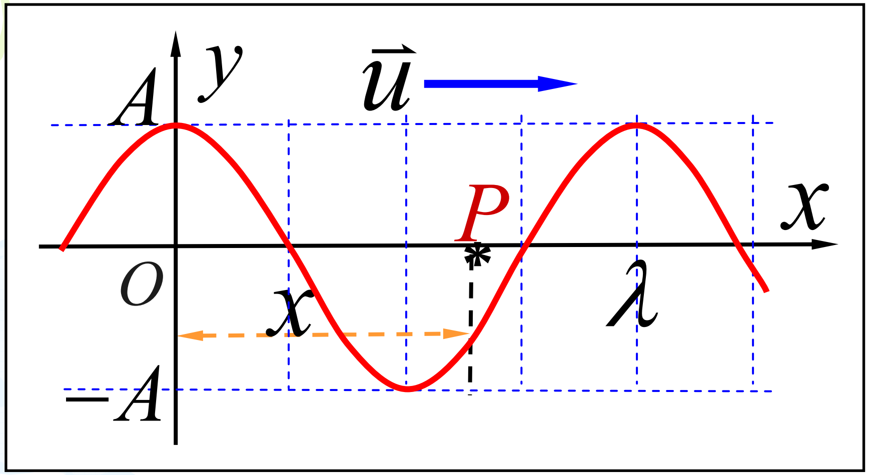
$t-x/u$时刻点O的运动 $=$ t时刻点P的运动

点P振动方程

$$y_P = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

➢ 波函数

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$



点 O 振动方程

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$x = 0,\ \varphi = 0$$

相位落后法

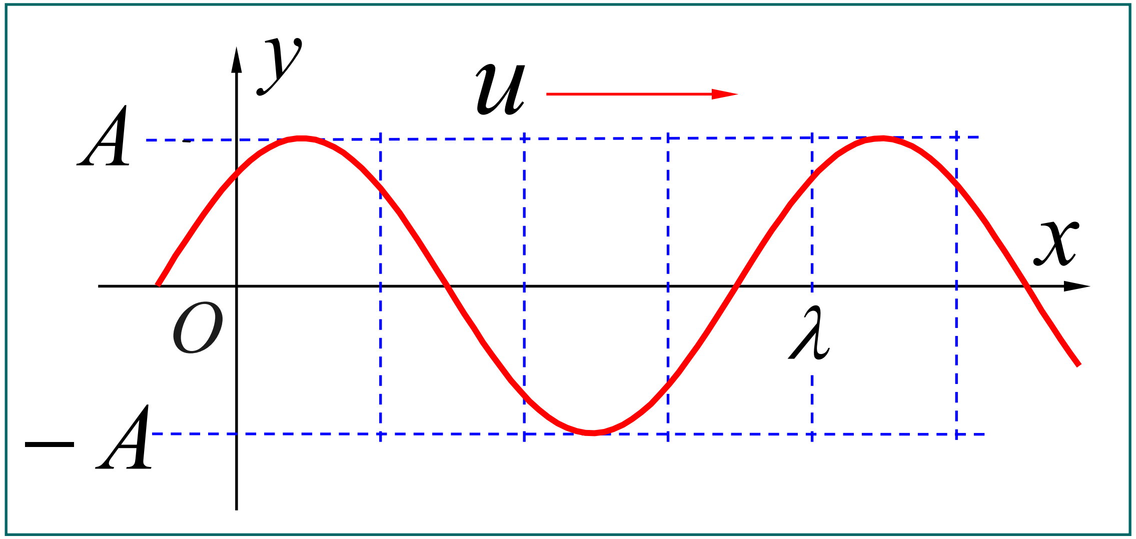
点 P 比点 O 落后的相位 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_O = -2\pi\dfrac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi\frac{x}{\lambda} = -2\pi\frac{x}{Tu} = -\omega\frac{x}{u}$$

点 P 振动方程　$y_p = A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)$

如果原点的初相位不为零

$$x = 0, \varphi \neq 0$$



点 O 振动方程 $y_O = A\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴正向

$$y = A\cos[\omega(t \boxed{+} \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴负向

- 波动方程的其它形式

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$$

角波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

- 质点的振动速度，加速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

二 波函数的物理意义

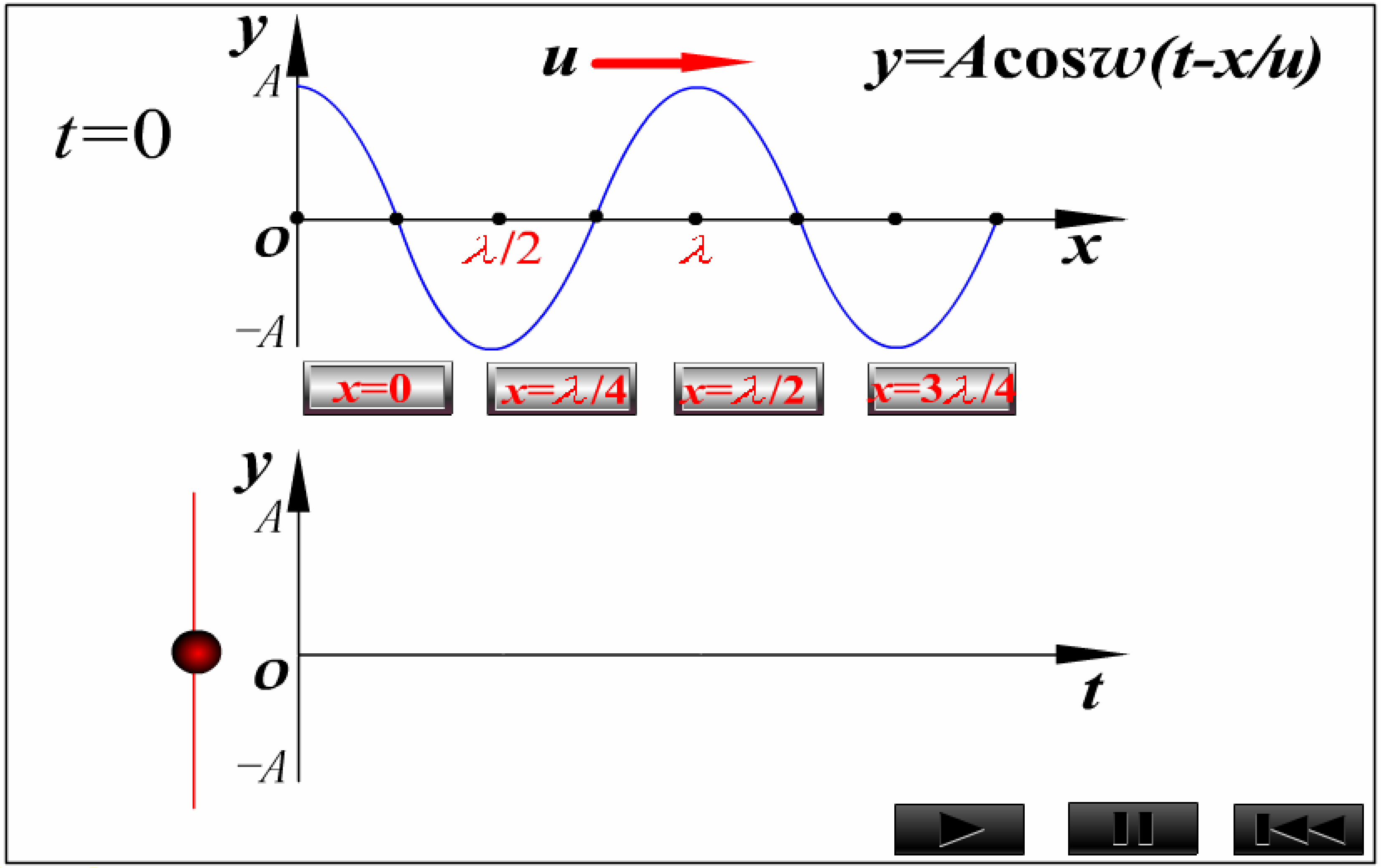
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

1 当 x 固定时， 波函数表示该点的简谐运动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差.

$$\Delta\varphi = -\omega\frac{x}{u} = -2\pi\frac{x}{\lambda}$$

$$y(x,t) = y(x,t+T)$$（波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐运动图



$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

2 当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，即此刻的波形.

$$y(x,t) = y(x+\lambda,t)$$ （波具有空间的周期性）

$$\varphi_1 = \omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi$$

波程差

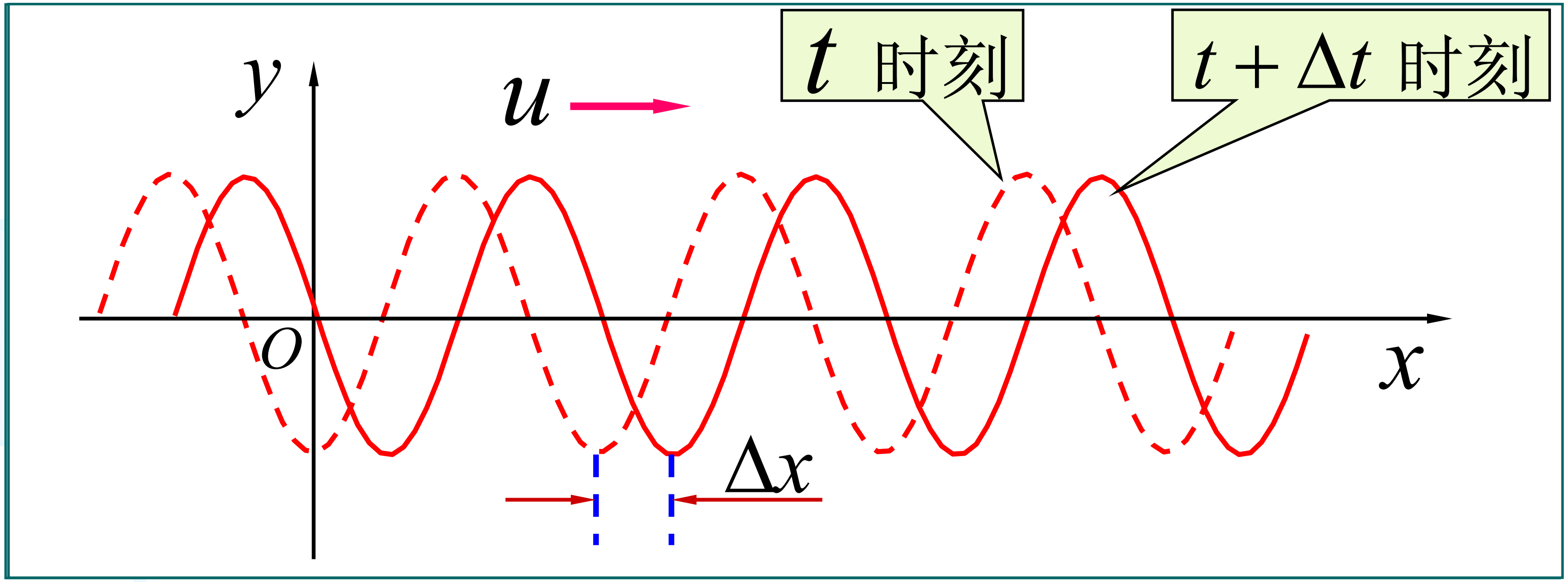
$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1$$

$$\varphi_2 = \omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$$

3　若 x,t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况（行波）.



$$y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \qquad \varphi(t,x)=\varphi(t+\Delta t, x+\Delta x)$$

$$2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})=2\pi(\frac{t+\Delta t}{T}-\frac{x+\Delta x}{\lambda}) \qquad \frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \Delta x = u\Delta t$$

例1 已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：方法一（比较系数法）.

$$\boxed{y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

把题中波动方程改写成

$$y=(5\text{cm})\cos 2\pi\left[\left(\frac{2.50}{2}\text{s}^{-1}\right)t-\left(\frac{0.01}{2}\text{cm}^{-1}\right)x\right]$$

比较得

$$T=\frac{2}{2.5}\text{s}=0.8\,\text{s}\quad \lambda=\frac{2\text{cm}}{0.01}=200\,\text{cm}\quad u=\frac{\lambda}{T}=250\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

例1　已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\mathrm{cm})\cos\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x].$$

解：方法二（由各物理量的定义解之）.

波长是指同一时刻 t ，波线上相位差为 2π 的两点间的距离.

$$\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x_1]-\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x_2]=2\pi$$

$$\boxed{\lambda=x_2-x_1=200\,\mathrm{cm}}$$

周期为相位传播一个波长所需的时间

$$\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t_1-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x_1]=\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t_2-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x_2]$$

$$x_2-x_1=\lambda=200\,\mathrm{cm}$$

$$T=t_2-t_1=0.8\,\mathrm{s}$$

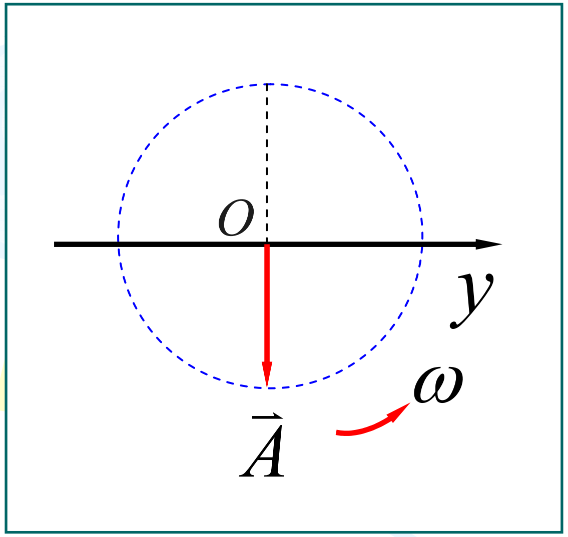
$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=250\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

例2　一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\mathrm{m}$，$T=2.0\mathrm{s}$，$\lambda=2.0\mathrm{m}$．在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动．求

1） 波动方程

解　写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$



$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0,\ v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

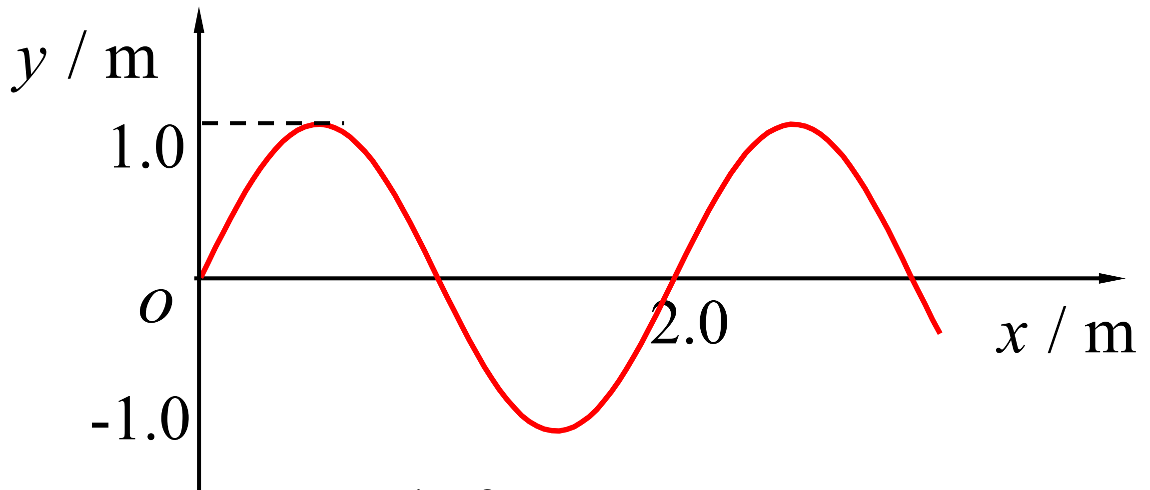
$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

2） 求$t=1.0\mathrm{s}$ 波形图.

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

$t=1.0\mathrm{s}$
波形方程

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[\frac{\pi}{2}-(\pi\,\mathrm{m}^{-1})x]$$
$$=(1.0\mathrm{m})\sin(\pi\,\mathrm{m}^{-1})x$$



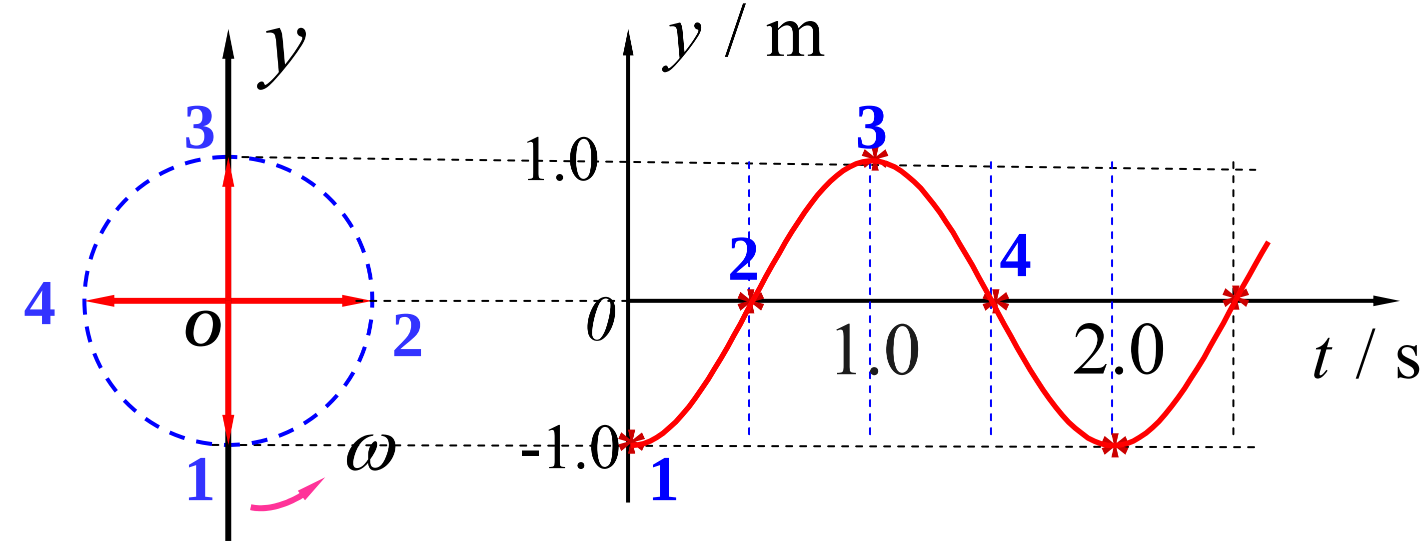
$t=1.0$ s 时刻波形图

3） $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并做图 .

$$y=(1.0\text{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\text{s}}-\frac{x}{2.0\text{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

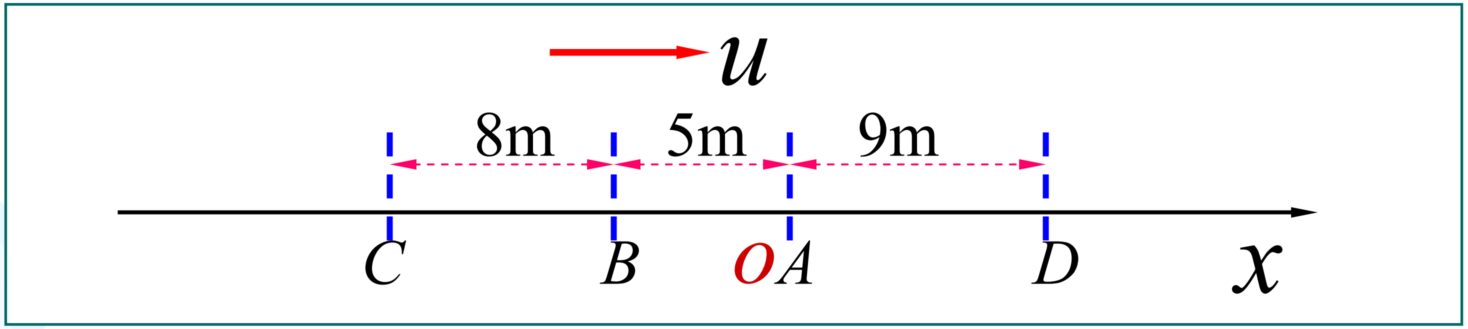
$x=0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$$y=(1.0\text{m})\cos[(\pi\,\text{s}^{-1})t-\pi]$$



$x=0.5\ \text{m}$ 处质点的振动曲线

例3 一平面简谐波以速度$u=20\mathrm{m/s}$沿直线传播,波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos(4\pi\mathrm{s}^{-1})t$.



1） 以 A 为坐标原点，写出波动方程

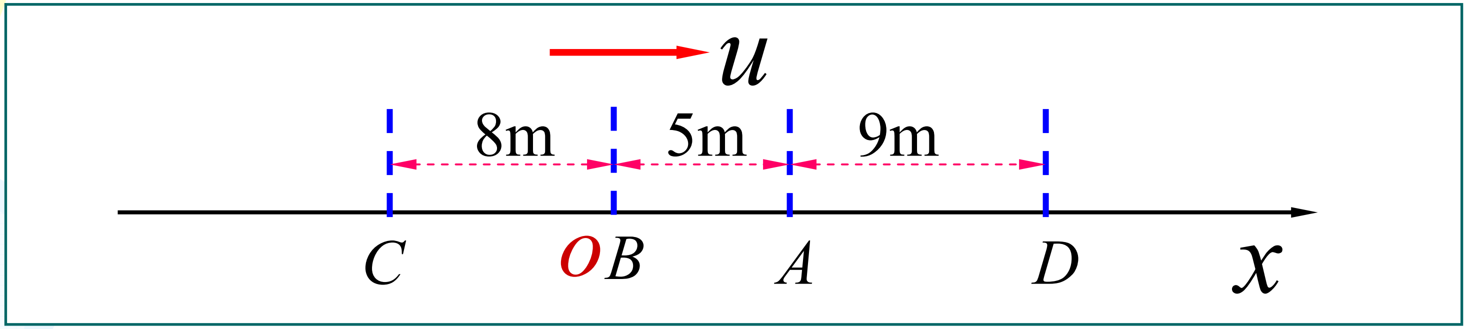
$$A=3\times10^{-2}\mathrm{m}\quad T=0.5\mathrm{s}\quad \varphi=0\quad \lambda=uT=10\mathrm{m}$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}}-\frac{x}{10\mathrm{m}})$$

2） 以 B 为坐标原点，写出波动方程

$$y_A=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B-\varphi_A=-2\pi\frac{x_B-x_A}{\lambda}=-2\pi\frac{-5}{10}=\pi$$

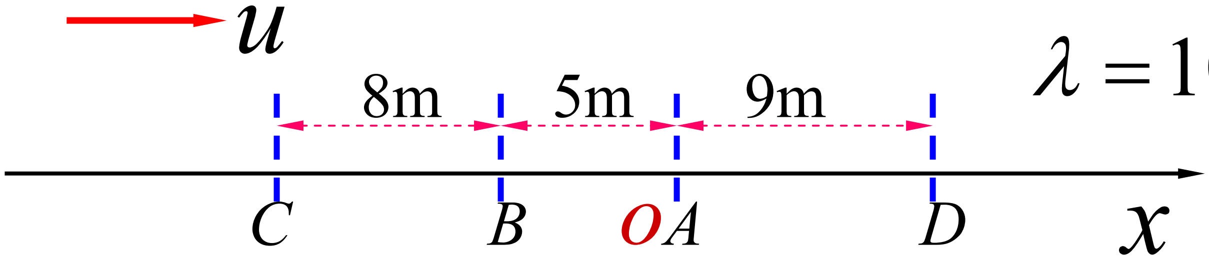
$$\varphi_B=\pi \qquad y_B=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+\pi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}}-\frac{x}{10\mathrm{m}})+\pi]$$

3）写出传播方向上点C、点D 的简谐运动方程

$$y_A=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\lambda=10\mathrm{m}$$



点 C 的相位比点 A 超前

$$y_C=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+2\pi\frac{AC}{\lambda}]$$

$$=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+\frac{13}{5}\pi]$$

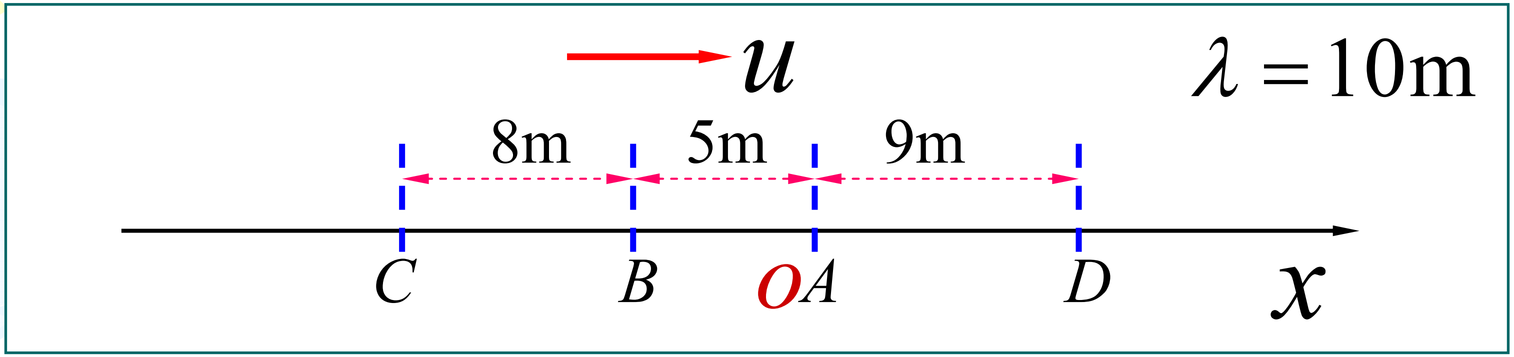
点 D 的相位落后于点 A

$$y_D=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t-2\pi\frac{AD}{\lambda}]$$

$$=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t-\frac{9}{5}\pi]$$

4）分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

讨 论

1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y=-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$ （向 x 轴正向传播， $\varphi=\pi$ ）

$$y=-A\cos\omega(-t-\frac{x}{u})$$ （向 x 轴负向传播， $\varphi=\pi$ ）

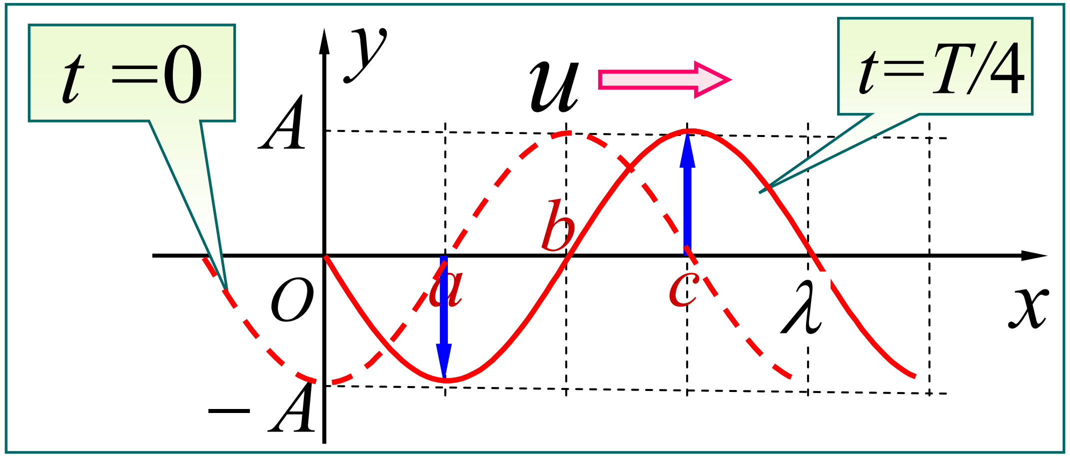
2）平面简谐波的波函数为 $y=A\cos(Bt-Cx)$ 式中 A,B,C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

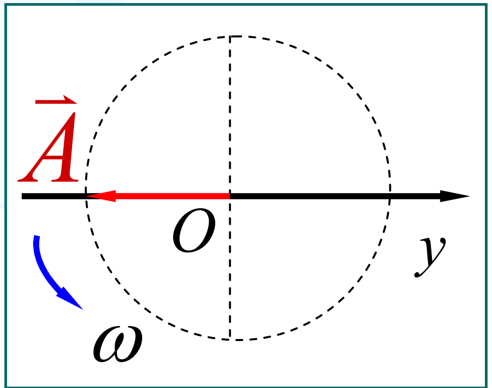
$$y=A\cos(Bt-Cx) \qquad y=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{C}} \qquad T=\frac{2\pi}{B} \qquad \boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{d}{\lambda}=dC}$$

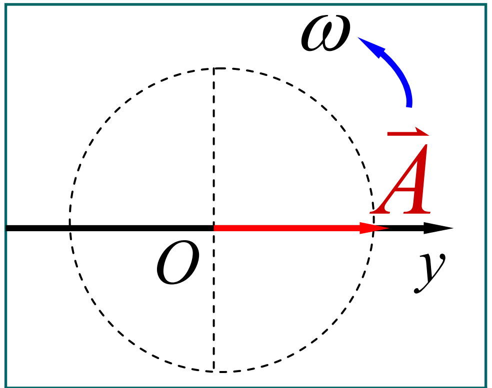
3）如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动初相位.

$$\varphi(-\pi \sim \pi)$$

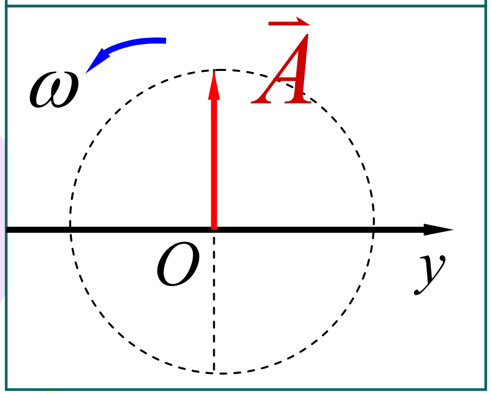




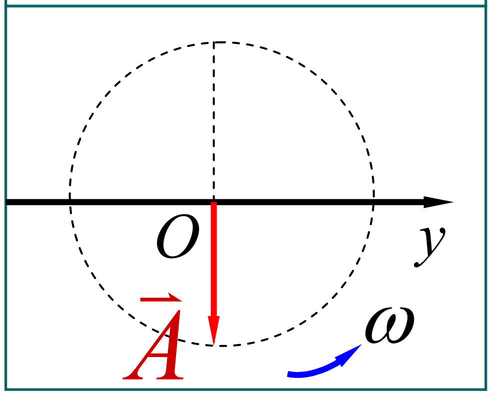
$$\varphi_o = \pi$$



$$\varphi_b = 0$$



$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$