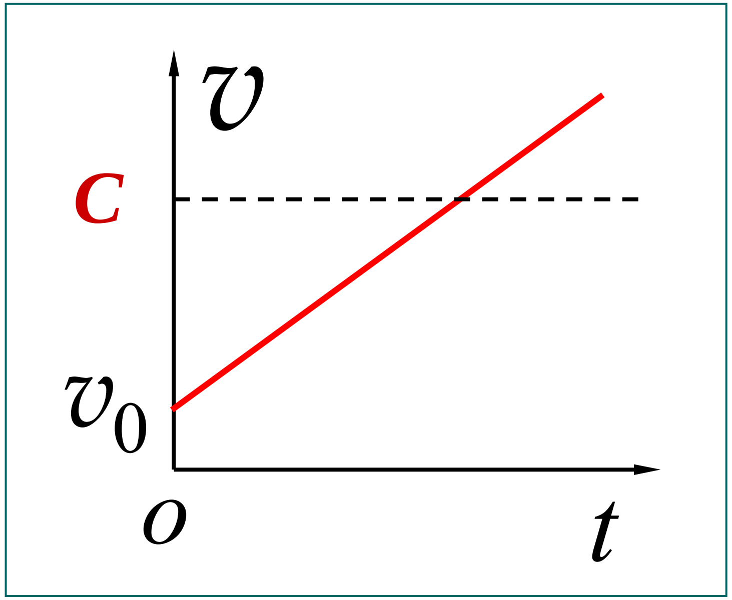
◆ 牛顿定律与光速极限的矛盾

物体在恒力作用下的运动

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



经典力学中物体的质量与运动无关

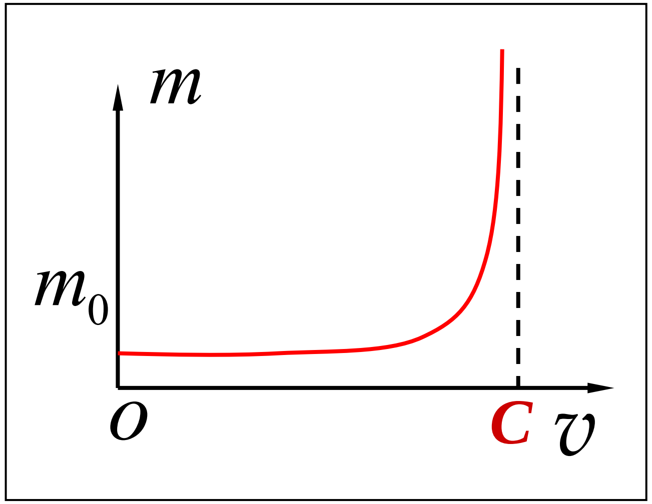
$$v_t = v_0 + at$$

一　动量与速度的关系

1） 相对论动量 $\vec{p}=\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma m_0\vec{v}=m\vec{v}$

当 $v<<c$ 时　$\vec{p}=m\vec{v}\rightarrow m_0\vec{v}$

2） 相对论质量 $\boxed{m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$



$m(v)$ 在不同惯性系中大小不同．

静质量 m_0 ：物体相对于惯性系静止时的质量．

当 $v<<c$ 时 $m\rightarrow m_0$

二 狭义相对论力学的基本方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

当 $v \ll c$ 时 $m \to m_0$ $\vec{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

当 $v \to c$ 时, $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 急剧增加, 而 $\vec{a} \to 0$ ，所以光速 ***C*** 为物体的极限速度.

相对论动量守恒定律

当 $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$ 时， $\sum\limits_i \vec{p}_i=\sum\limits_i \dfrac{m_{i0}\vec{v}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 不变.

三 质量与能量的关系

动能定理 $\Delta E_{\mathrm{k}}=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}mv^{2}-\frac{1}{2}mv_{0}^{2}$

设 $E_{\mathrm{k}0}=0\quad \vec{F}=F\vec{i}\quad v_{0}=0$

$$E_{\mathrm{k}}=\int_{0}^{x}F\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\int_{0}^{p}v\,\mathrm{d}p$$

利用 $\mathrm{d}(pv)=p\mathrm{d}v+v\mathrm{d}p$ 和 $\vec{p}=\dfrac{m_{0}\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$

得 $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{m_{0}v^{2}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}-\displaystyle\int_{0}^{v}\frac{m_{0}v}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}\mathrm{d}v$

积分后，得 $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{m_{0}v^{2}}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}+m_{0}c^{2}\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}-m_{0}c^{2}$

$$m = \gamma m_0 \qquad E_k = mv^2 + m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - m_0c^2$$

相对论**动能** $$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

- 当 $v \ll c$ 时， $E_k \to \frac{1}{2}m_0v^2$

相对论**质能**关系 $$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k$$

质能关系**预言**：物质的质量就是能量的一种储藏．

爱因斯坦认为（**1905**）

懒惰性 ⟹ 惯性 (**inertia**)

活泼性 ⟹ 能量 (**energy**)

物体的懒惰性就是物体活泼性的度量．

相对论质能关系

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_{\mathrm{k}}$$

- 静能 m_0c^2：物体静止时所具有的能量 .

电子的静质量 $m_0 = 0.911 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$

电子的静能 $m_0c^2 = 8.19 \times 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0.511\,\mathrm{MeV}$

质子的静质量 $m_0 = 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

质子的静能 $m_0c^2 = 1.503 \times 10^{-10}\,\mathrm{J} = 938\,\mathrm{MeV}$

1千克的物体所包含的静能 $= 9 \times 10^{16}\,\mathrm{J}$

1千克汽油的燃烧值为 4.6×10^{7} 焦耳 .

5）相对论能量和质量守恒是一个统一的物理规律。

质能关系预言：物质的质量就是能量的一种储藏。

例：$m_0 = 1\text{kg}$， $E_0 = m_0 c^2 = 9\times 10^{16}\,\text{J}$

现有 **100** 座楼，每楼 **200** 套房，每套房用电功率 **10000 W**，总功率 $2\times 10^8\,\text{W}$ ，每天用电 **10** 小时，年耗电量 $2.72\times 10^{15}\,\text{J}$ ，可用约 **33** 年。

电子的静质量：$m_0 = 0.911\times 10^{-30}\,\text{kg}$

电子的静能：$m_0 c^2 = 8.19\times 10^{-14}\,\text{J} = 0.511\text{MeV}$

质子的静质量：

质子的静能：$m_0 c^2 = 1.503\times 10^{-10}\,\text{J} = 938\text{MeV}$

例：在一种热核反应中，各种粒子的静质量如下：

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

求：反应释放的能量。

氘核 $({}^{2}_{1}\mathrm{H})$ $m_{\mathrm{D}} = 3.3437\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氚核 $({}^{3}_{1}\mathrm{H})$ $m_{\mathrm{T}} = 5.0449\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氦核 $({}^{4}_{2}\mathrm{He})$ $m_{\mathrm{He}} = 6.6425\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

中子 $({}^{1}_{0}\mathrm{n})$ $m_{\mathrm{n}} = 1.6750\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

反应质量亏损

$$\Delta m_0 = (m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}}) - (m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{n}}) = 0.0311\times10^{-27}\,(\mathrm{kg})$$

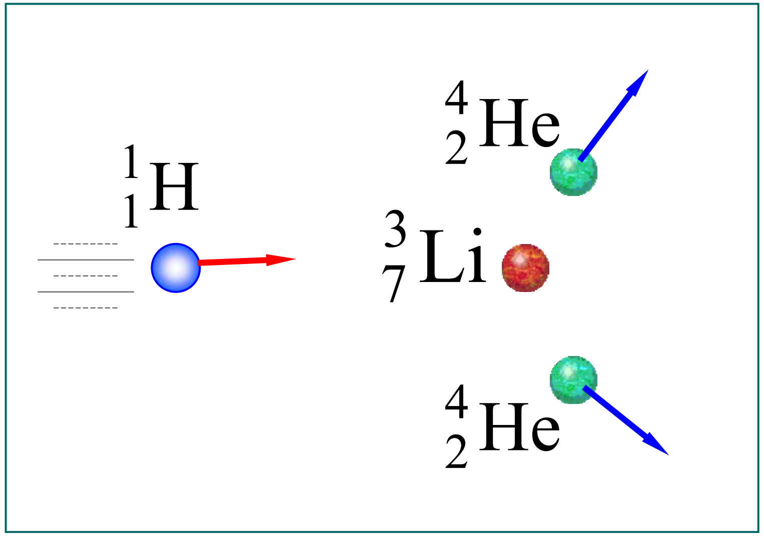
释放能量 $\Delta E = \Delta m c^2 = 2.799\times10^{-12}\,\mathrm{J}$

1 kg 核燃料释放能量 $\dfrac{\Delta E}{m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}}} = 3.35\times10^{14}\,(\mathrm{J/kg})$

- 锂原子的核反应

$$\boxed{E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k}$$

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$



两α粒子所具有的总动能

$$\Delta E_k = 17.3\mathrm{MeV}$$

两α粒子质量比静质量增加

$$\Delta m = \frac{\Delta E_k}{c^2} = 3.08 \times 10^{-29}\mathrm{kg} = 0.01855\mathrm{u}$$

实验测量　$m_{\mathrm{H}} = 1.00783\mathrm{u}$　　$m_{\mathrm{Li}} = 7.01601\mathrm{u}$

$m_{\mathrm{He}} = 4.00260\mathrm{u}$　　$\boxed{\Delta m = 0.01864\mathrm{u}}$

理论计算和实验结果相符.　　$\boxed{1\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}}$

物理意义

$$E = mc^2$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

◆ 惯性质量的增加和能量的增加相联系，质量的大小应标志着能量的大小，这是相对论的又一极其重要的推论．

相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代的意义的理论公式．

四 质能公式在原子核裂变和聚变中的应用

1 核裂变

$$^{235}_{92}\mathrm{U}+^{1}_{0}\mathrm{n}\rightarrow ^{139}_{54}\mathrm{Xe}+^{95}_{38}\mathrm{Sr}+2^{1}_{0}\mathrm{n}$$

质量亏损 $\Delta m = 0.22\,\mathrm{u}$

原子质量单位 $1\mathrm{u} = 1.66\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

放出的能量 $Q = \Delta E = \Delta m\cdot c^2 \approx 200\,\mathrm{MeV}$

1g 铀— **235** 的原子裂变所释放的能量

$$Q = 8.5\times 10^{10}\,\mathrm{J}$$

我国于 1958 年建成的首座重水反应堆

2 轻核聚变

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

氘核 $m_0({}^{2}_{1}\mathrm{H}) = 3.3437 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氦核 $m_0({}^{4}_{2}\mathrm{He}) = 6.6425 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

质量亏损 $\Delta m = 0.026\mathrm{u} = 4.3 \times 10^{-29}\,\mathrm{kg}$

释放能量 $Q = \Delta E = (\Delta m)c^2 = 3.87 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} = 24\mathrm{MeV}$

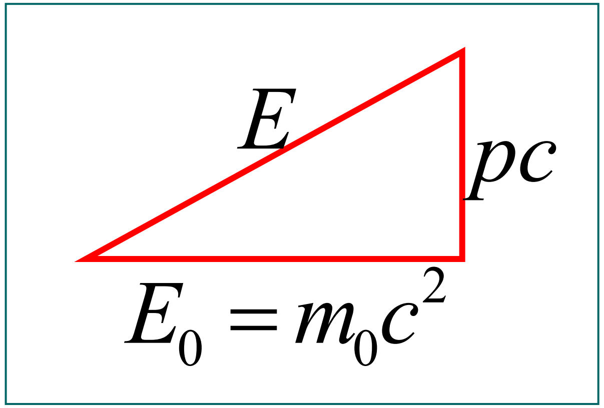
轻核聚变条件 温度要达到 $10^8\,\mathrm{K}$ 时，使 ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ 具有10keV 的动能，足以克服两 ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ 之间的库仑排斥力.

五 动量与能量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

$$\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2}$$



极端相对论近似 $E >> E_0$， $E \approx pc$

光子 $m_0 = 0$， $v = c$ $p = E/c = mc$

光的波粒二象性 $E = h\nu$， $p = \dfrac{h}{\lambda}$

普朗克常量

例1 设一质子以速度 $v = 0.80c$ 运动．求其总能量、动能和动量．

解 质子的静能 $E_0 = m_0c^2 = 938\text{MeV}$

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{938}{(1-0.8^2)^{1/2}}\text{MeV} = 1563\text{MeV}$$

$$E_\text{k} = E - m_0c^2 = 625\text{MeV}$$

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 6.68\times10^{-19}\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

也可如此计算

$$cp = \sqrt{E^2-(m_0c^2)^2} = 1250\text{MeV} \quad p = 1250\text{MeV}/c$$

例2　已知一个氚核 ($^3_1\mathrm{H}$)和一个氘核 ($^2_1\mathrm{H}$)可聚变成一氦核 $^4_2\mathrm{H_e}$，并产生一个中子 $^1_0\mathrm{n}$，试问这个核聚变中有多少能量被释放出来．

解　核聚变反应式　$^2_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}\rightarrow ^4_2\mathrm{He}+^1_0\mathrm{n}$

$$m_0c^2(^2_1\mathrm{H}) = 1875.628\,\mathrm{MeV}$$

$$m_0c^2(^3_1\mathrm{H}) = 2808.944\,\mathrm{MeV}$$

$$m_0c^2(^4_2\mathrm{He}) = 3727.409\,\mathrm{MeV}$$

$$m_0c^2(^1_0\mathrm{n}) = 939.573\,\mathrm{MeV}$$

氘核和氚核聚变为氦核的过程中，静能量减少了

$$\Delta E = 17.59\mathrm{MeV}$$