目　　录

第一单元

线性方程组

线性方程组是从应用数学、自然科学、社会科学和工程学等学科中的许多问题的数学建模中产生的.线性问题 $Ax=b$ 是许多数学模型的基础.在这门课程里,A 表示一个矩阵.在其他场合下,A 可以表示一个微分变换或积分变换,或者两者的组合.主要想法是找出线性方程组 $Ax=b$ 相容或不相容的条件.什么样的算法能被用来决定线性方程组的相容性?如果方程组是相容的,什么样的算法能够应用于解这个方程组?如果方程组是不相容的,我们能否求出这个方程组的近似解?

课文 1.1 线性方程组的例子

在这篇课文里我们将考虑**线性方程组**,并且分析它们的**解集**.线性方程组产生于许多问题的数学建模中.

初始化软件包

```
>with(Lianlg):with(linsys);
```

线性方程组

让我们从具有两个未知量的两个方程的某些例子开始.

例 1.1 考虑有两个未知量的由两个方程组成的方程组

```
>eq1:=x+y=z;  eq2:=x-2*y=4;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组有**唯一解**.

例 1.2 考虑有两个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:=x+2*y=2;  eq2:=2*x+4*y=4;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组有**无穷多个解**.

例 1.3 考虑有两个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:x+2*y=2;  eq2:=x+2*y= -2;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组**没有解**.

同样的图示方法能够建立用于有三个未知量的方程组上.

例 1.4 考虑有三个未知量的由三个方程所组成的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2;  eq2:=x-2*y-z=4;  eq3:=x-y-z=1;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解：

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

在这个例子里方程组有**唯一解**.

例 1.5 考虑有三个未知量的三个方程的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2;  eq2:=x+y+z=2;  eq3:x-y-z=1;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解：

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

在这个例子里方程组有**无穷多个解**.

例 1.6 考虑有三个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2;  eq2:=x+y+z=10;
```

让我们可用图示法检查这个方程组是否有解：

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组**没有解**.

简单的信用问题导致线性方程组.

例 1.7 两个未知量两个方程的方程组.总共 10 000 美元投资给两个发行随时可换成现款的股票的投资公司 M_1 和 M_2.公司 M_1 的年利润率是 15%，公司 M_2 的年利润率是 22%.一年后总共的利润是 2000 美元.试问：投资给每个公司多少美元？

设分别给公司 M_1 和 M_2 投资 x 千美元和 y 千美元.为上述问题建模的方程是

```
>eq1:=x+y=10;  eq2:=15/100*x+22/100*y=2;
```

有 x 和 y 的值满足这两个方程吗？

用代数方法检查.如果你想看中间步骤，就挑选 Solveqns 论证程式；否则挑选无步骤程式.

```
>Solveqns({eq1,eq2},{x,y});
```

例 1.7 描绘了一个有唯一解的两个未知量两个方程的方程组.

例 1.8 三个未知量三个方程的方程组.总共 10 000 美元投资给三个投资公司 M_1，M_2 和 M_3.投资给这三个公司的年利润率分别为 12%，15% 和 22%.总共的利润是 2000 美元.投资者的策略是投给公司 M_2 的钱是投给公司 M_1 的 2 倍.为了达到这个利润，应当投资每个公司多少美元？

设投给公司 M_1，M_2 和 M_3 的钱分别是 x、y、z 千美元.为这个问题建模的数学方程是

```
>eq1:=x+y+z=10;
  eq2:12/100*x+15/100*y+22/100*z=2;
  eq3:=2*x-y=0;
```

有 x、y 和 z 的值满足上述方程组吗？

用代数方法检查：

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

例 1.8 描绘了一个有唯一解的三个未知量三个方程的方程组.

例 1.9 三个未知量两个方程的方程组.总共 10 000 美元投资给三个公司 M_1，M_2 和 M_3.年利润率分别为 12%，15% 和 22%.总共的利润是 2000 美元.为了达到这个利润，应当给每个公司投资多少美元？

设投给公司 M_1，M_2 和 M_3 的钱分别是 x、y、z 千美元.为这个问题建模的数学方程是

```
>eq1:=x+y+z=10;  eq2:=12/100*x+15/100*y+22/100*z=2;
```

有 x、y 和 z 的值满足这两个方程吗?

用代数方法检查:

```
>solveqns({eq1,eq2},{x,y,z});
```

计算能够投给公司 M_3 的最大可能的量,对于这个最大值,能够投给另外两个公司的钱是多少?

例 1.9 描绘了一个**有许多解**的三个未知量两个方程的方程组.注意其中一个变量任取一个值,其他两个变量的值能够用这个变量的值解出来.取任意值的变量称为**自由变量**.

例 1.10 四个未知量一个方程的方程组

```
>eq1:=2*x+3*y-7*z+2*w=0;
```

用代数方法检查

```
>solveqns(eq1,{x,y,z,w});
```

例 1.10 描绘了一个四个未知量一个方程的方程组,它有**无穷多个解,有三个自由变量**.

例 1.11 三个未知量三个方程的方程组

```
>eq1:=x+y-z=1;  eq2:=x+2*y-7*z=4;  eq3:2*x+3*y-8*z=8;
```

有 x,y,z 的值满足这些方程吗?

代数地检查

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

例 1.11 描绘了一个**没有解**的三个未知量三个方程的方程组.

例 1.1—例 1.11 表明对于一个线性方程组,下述之一必定成立:

- 方程组有唯一解.
- 方程组有无穷多个解.
- 方程组没有解.

一般地,n 个未知量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$的 m 个方程的方程组是形如

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

的方程组,其中 a_{ij} 是未知量的系数,b_i 是已知量.如果方程的数目 m 等于未知量的数目 n,则这个方程组是方的.如果所有 b_i 都等于零,则这个方程组称为**齐次方程组**;否则,称它为**非齐次方程组**.

练 习

在下列练习中你可能需要利用自动函数 graph 和 solveqns 来回答问题.

1. 考虑线性方程组

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 5\\
x + ky &= 15
\end{aligned}$$

确定参数 k 的值,使得方程组

(1)有唯一解；

(2)没有解.

这个方程组能够有许多解吗？请解释.

2. 下列线性方程组有解吗？分析并且说出理由.

(1)$2x-y+3z=1, x-4y+2z=2, x-11y+3z=5$;

(2)$2x-y+3z=1, x-4y+2z=2, x-11y+3z=6$;

(3)$2x-y+3z=1, x-4y+2z=2, x-11y+4z=7$.

3. 假设线性方程组

$$\begin{aligned} x-2y&=2\\ x-y&=2\\ 4x-8y&=d \end{aligned}$$

对于 d 的某个值有唯一解. 通过对于 d 的不同的选择画几个图，确定有唯一解时 d 的条件.

4. 找出 d 的所有值(如果有的话)使得下述方程组没有解

$$\begin{aligned} x-2y&=2\\ x-y&=2\\ 4x-8y&=d \end{aligned}$$

(提示：对于 d 的不同的选择画几个图，然后确定产生这个结果的 d 的条件.)

5. 对于方程组

$$\begin{aligned} 2x-y+3z&=1\\ x-4y+2z&=2\\ x-3y+z&=d \end{aligned}$$

重复第 3 题的要求.

6. 总共 10 000 美元投资给三个投资公司 M_1, M_2 和 M_3. 年利润率分别是 12%, 15% 和 22%. 投给 M_1 和 M_2 的资金的和等于投给 M_3 的资金. 总利润是 k 美元. 总利润的最小值是多少？最大值是多少？为了达到最小值或最大值，应当投资给每个公司多少美元？

课 文 1.2

相容和不相容的方程组

一个线性方程组的解由同时满足这个方程组的所有未知量的值组成.方程组的所有解组成的集合称为**解集**.对于任一线性方程组,下述之一必定成立:

- 解集是单元素集;
- 解集是无限集;
- 解集是空集.

如果一个方程组的解集不是空集,则称它是**相容的**.这时解集是**单元素集**或者**无限集**,根据这个方程组有**唯一解**或者有**无穷多个解**确定.如果一个方程组的解集是**空集**,则称它是**不相容的**.等价地,这个方程组**没有解**.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

齐次方程组

n 个未知量 m 个方程的齐次方程组是形如

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

的方程组.

齐次方程组是相容的还是不相容的?

齐次线性方程组总是相容的.齐次方程组的解集决不会是空集.事实上,$x_1=0, x_2=0, \cdots, x_m=0$ 总是满足这样的方程组,这个解称为**零解**或**平凡解**.

例 2.1 考虑方程组

```
>eq1:=x+y+2*z=0;  eq2:=2*x+y-3*z=0;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns({eq1,eq2},{x,y,z});
```

例 2.1 描绘了一个有**无穷多个解**和**一个自由变量**的方程组.

例 2.2　考虑方程组

```
>eq1:=x-y-z+2*w=0;
 eq2:=x+y+4*z-w=0;
 eq3:=7*x-6*y+7*w=0;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z,w});
```

例 2.2 描绘了一个有**无穷多个解**和**一个自由变量**的方程组.

例 2.3　考虑方程组

```
>eq1:=x+2*y-5*z+6*w=0;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns(eq1,{x,y,z,w});
```

这个方程组有**无穷多个解**和**三个自由变量**.

例 2.4　考虑方程组

```
>eq1:=x-2*y-z=0;   eq2:=2*x-y+z=0;   eq3:=x+3*y-5*z=0;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

这个方程组有**平凡解**作为它的**唯一解**.

例 2.1—2.4 用例子说明了齐次方程组的几种情形.所有齐次方程组都是相容的吗?你能够描述它的解集吗?

如果方程的数目小于未知量的数目(不足方程组),那么齐次方程组有无穷多个解.如果方程的数目大于或等于未知量的数目(盈余方程组),那么齐次方程组将有唯一解或者无穷多个解.于是

齐次线性方程组是相容的.它的解集是单元素集或无限集.(事实 1.1)

非齐次线性方程组

考虑 n 个未知量 m 个方程的非齐次方程组

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

非齐次方程组是相容的还是不相容的?

例 2.5　考虑方程组

```
>eq1:=x+y+2*z=1;   eq2:=2*x+2*y-4*z=2;
```

这个方程组的解集是什么??

```
>solveqns({eq1,eq2},{x,y,z});
```

这个方程组有无穷多个解和一个自由变量.这个非齐次方程组的解$[x,y,z]$能表示成

$$[x,y,z]=[1-a,a,0]=[1,0,0]+[-a,a,0]$$
$$=[1,0,0]+a*[-1,1,0]$$

其中 a 是任一实变量.[1,0,0]是这个非齐次方程组的特解,而[-1,1,0]是伴随的齐次方程组的一个解.

例 2.6 考虑方程组

```
>eq1:=x+2*y-5*z+6*w=10;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns(eq1,{x,y,z,w});
```

这个方程组有**无穷多个解和三个自由变量**.这个非齐次方程组的一般解是

$$[x,y,z,w]=[10-2*a+5*b-6*c,a,b,c]$$
$$=[10,0,0,0]+[-2*a,a,0,0]+[5*b,0,b,0]+[-6*c,0,0,c]$$
$$=[10,0,0,0]+a*[-2,1,0,0]+b*[5,0,1,0]+c*[-6,0,0,1]$$

[10,0,0,0]是这个方程组的特解;[-2,1,0,0],[5,0,1,0]和[-6,0,0,1]是伴随的齐次方程组的解.

例 2.7 考虑方程组

```
>eq1:=x-y-z=1;  eq2:=x+y+4*z=-1;  eq3:=7*x-6*y-z=7;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

例 2.7 描绘了一个有唯一解的方程组.

例 2.8 考虑方程组

```
>eq1:=x-y-z=1;  eq2:=x+y+4*z=-1;  eq3:=3*x+y+7*z=3;
```

这个方程组的解集是什么?

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

例 2.8 描绘了一个没有解的方程组.

例 2.5—2.8 用例子说明了非齐次线性方程组的几种情形.每一个非齐次线性方程组相容吗?你能够描述解集吗?你能够描述解集是无限集的非齐次线性方程组的一般解吗?

每一个线性方程组 $Ax=b$ 或者没有解,恰有一个解,或者有无穷多个解.(事实 1.2)

练 习

在下列练习中你可能需要利用自动函数 graph 和 solveqns 来回答问题.

1.确定所给的线性方程组是否相容.如果方程组是相容的且有无穷多个解,确定自由变量的数目并且用这些变量来表示解.

(1)$x-y+z-w=0,\ 2x+3y-z+2w=0,\ x+2y-7z+w=1$;

(2)$x-y+z=1,\ 2x+y-3z=2,\ 3x-2z=4$;

(3)$x-y+2z=0,\ x+4y-3z=2,\ 3x-y+2z=-1$.

2.给出例子

(1)方程数目小于未知量数目的不相容的非齐次线性方程组;

(2)方程数目小于未知量数目的相容的线性方程组.

3.解释方程数目大于未知量数目的齐次方程组为什么有唯一解或者有无穷多个解?

4.解释为什么

(1)齐次线性方程组的解的和也是这个方程组的解;

(2)齐次线性方程组的一个解的数量倍也是这个方程组的解.

5.给出例子

(1)不相容的非齐次线性方程组,它的伴随的齐次方程组有无穷多个解;

(2)相容的非齐次线性方程组,它的伴随的齐次方程组有无穷多个解.写出非齐次方程组的一般解;

(3)相容的非齐次线性方程组,它的伴随的齐次方程组有唯一解.这个非齐次方程组有多少个解?

6.决定经过点 $P(1,2)$,$Q(-1,3)$和 $R(-4,5)$的 2 次多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$.(提示:写出决定系数 a,b 和 c 的方程.)

7.有 2 次多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 经过点 $P(1,2)$,$Q(-1,3)$,$R(-4,5)$和 $S(0,2)$吗? 证明你的回答是正确的.

8.有 2 次多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 经过点 $P(1,2)$,$Q(-1,3)$吗? 如果有的话,你能求出多少个多项式? 证明你的回答是正确的.

课　文 1.3

等价的方程组和初等行变换

在这篇课文里我们将把一个给定的线性方程组化简成另一个容易处理的方程组，什么类型的变换允许用来化简线性方程组成为另一个"等价的"方程组呢？

初始化软件包

```
>with(linalg);with(linsys);
```

等价的方程组

例 3.1　考虑下列线性方程组.方程组 S_1 由下述方程组成

```
>eq1:=x+y+z=1;   eq2:=2*x+3*y-z=2;   eq3:=x+y+2*z=3;
```

方程组 S_2 由下述方程组成

```
>eq11:=x+y+z=1;   eq22:=y-3*z=0;   eq33:=z=2;
```

方程组 S_1 的解是(利用 solveqns 的无步骤程式)

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

方程组 S_2 的解是

```
>solveqns({eq11,eq22,eq33},{x,y,z});
```

方程组 S_1 和 S_2 有相同的解.显然地，方程组 S_2 比方程组 S_1 容易解.事实上，通过把 $z=2$ 代入 eq22 我们求出 y，然后把 z 和 y 的值代入 eq11，我们求出 x.

有相同解集的线性方程组称为等价的方程组.

初等行变换

例 3.1 建议我们努力把方程组化简成一个容易处理的等价的方程组.什么变换可能允许来做这件事？

用一个非零数乘一个方程，它的解集改变吗？

例 3.2　考虑方程

```
>eq1:=x+2*y=3;
```

以及它的倍数

```
>eq2:=3*x+6*y=9;
```

用图示法检查这两个方程有相同的解集：

```
>graph(eq1,eq2);
```

图象表明这两条直线重合.于是它们有相同的解集.

用代数方法检查

```
>solveqns(eq1,{x,y});
>solveqns(eq2,{x,y});
```

用一个非零数乘线性方程组的一个方程,产生等价的方程组.

如果把线性方程组的两个方程互换位置,它的解集改变吗?

例 3.3 考虑方程组 S_1

```
>eq1:=x+y+3*z=4;   eq2:=x-y+z=0;   eq3:=x-y-z=10;
```

把 S_1 的方程 2 和方程 3 互换位置,得到新的方程组 S_2

```
>eq11:=x+y+3*z=4;   eq22:=x-y-z=10;   eq33:=x-y+z=0;
```

方程组 S_1 和 S_2 等价吗? 检查它们的解集

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
>solveqns({eq11,eq22,eq33},{x,y,z});
```

因为它们有相同的解,所以这个方程组等价.

把线性方程组的两个方程互换位置,产生等价的方程组.

如果把线性方程组的一个方程用它与另一个方程的非零数倍之和代替,它的解集改变吗?

例 3.4 考虑方程组 S_1

```
eq1:=x-2*y=2;   eq2:=x+3*y=1;
```

用 2 乘 S_1 的方程 1,并且把它加到方程 2 上,得到新的方程组 S_2

```
eq11:=x-2*y=2;   eq22:=3*x-y=5;
```

用图示法检查两个方程组是否有相同的解集.

方程组 S_1 的图象是

```
>graph(eq1,eq2);
```

方程组 S_2 的图象是

```
>graph(eq11,eq22);
```

从这两个方程组的图象,你能得出什么结论? 这些图象表明这两个方程组有相同的解集.关于这两个方程组,这蕴含着什么?

线性方程组的一个方程被它与另一个方程的倍数之和代替,产生等价的方程组.

例 3.1—3.4 表明下述变换产生等价的线性方程组:

- 同一个非零数乘一个方程.
- 互换两个方程的位置.
- 把一个方程的倍数加到另一个方程.

这三种变换称为**初等行变换**.

练 习

1. 识别把方程组 A 变换到方程组 B 的初等行变换，并且利用自动函数 graph 图示地（即几何地）证明这两个方程组是等价的.

(1) A

```
>eq1:x-3*y=1;  eq2:2*x-5*y=3;
```

B

```
>eq1:=x-3*y=1;  eq2:=y=1;
```

(2) A

```
>eq1:=x-4*y=1;  eq2:=x-y=3;
```

B

```
>eq1:=x-4*y=1;  eq2:3*x-9*y=5;
```

(3) A

```
>eq1:=x-3*y=1;  eq2:=3*x-5*y=3;
```

B

```
>eq1:=3*x-9*y=3;  eq2:3*x-5*y=3;
```

(4) A

```
>eq1:=x-y=1;  eq2:=2*x+2*y=5;
```

B

```
>eq1:=2*x+2*y=5;  eq2:x-y=1;
```

2. 用代数方法说明下列各对方程组是等价的.

(1) A

```
>eq1:=x-y+z=1;  eq2:=2*x-3*y+z=0;
  eq3:=-x+2*y-2*z=-1;
```

B

```
>eq1:=x-y+z=1;  eq2:=y+z=2;  eq3:=z=1;
```

(2) A

```
>eq1:=x-y+z=3;  eq2:=x-3*y+z=0;
```

B

```
>eq1:=x-y+z=3;  eq2:=y=3/2;
```

课　文 1.4　线性方程组的矩阵表示

在解线性方程组时,我们可以隐去未知量并且定义一个矩阵来表示潜在的方程组.一般地,一个 $m \times n$ 矩阵可以定义成由数组成的 m 行和 n 列的长方形阵列.矩阵是概括和列表显示许多实际问题的信息的方便且有效的记号.例如,在一个百货商店的 3 个不同摊位的 7 种不同品牌的商品的销售额能够用下述矩阵来表示:

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 30 & 15 & 22 & 17 & 56 \\ 34 & 53 & 42 & 67 & 33 & 78 & 36 \\ 22 & 14 & 56 & 78 & 93 & 17 & 33 \end{bmatrix}$$

对于线性方程组,我们使它与两种类型的矩阵联系:

- **系数矩阵**:由变量的系数组成行的矩阵.
- **增广矩阵**:由变量的系数和常数项组成行的矩阵.

一个 $m \times (n+1)$ 增广矩阵的所有行代表 n 个未知量 m 个方程的非齐次方程组.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

矩阵表示

例 4.1　考虑方程组

```
>eq1:=2*x-3*y+z-w=0;   eq2:=x-y+z-5*w=0;
 eq3:=x-y+z-w=9;       eq4:=x+6*y-9*z+w=21;
```

与这个方程组相联系的增广矩阵是

```
>AUG:=matrix([[2,-3,1,-1,0],[1,-1,1,-5,0],[1,-1,1,-1,9],
              [1,6,-9,1,21]]);
```

例 4.2　考虑方程组

```
>eq1:=2*x-3*y+z=0;   eq2:7*x+11*y-9*z=2;
```

与这个方程组相联系的增广矩阵是 2×4 矩阵:

```
>AUG:=matrix([[2,-3,1,0],[7,11,-9,2]]);
```

我们也能够建立下面的联系：对于每一个增广矩阵，能够写出对应的线性方程组.

例 4.3 考虑增广矩阵

```
>A:=matrix([[2,3,5,1],[1,0,2,5],[2,4,0,0]]);
```

与这个矩阵相联系的方程组是

```
>eq1:=2*x+3*y+5*z=1;
 eq2:=x+2*z=5;
 eq3:=2*x+4*y=0;
```

例 4.4 考虑增广矩阵

```
>a:=matrix([[2,3,5,1,0],[-1,8,2,5,0],[2,4,9,-7,0]]);
```

与这个矩阵相联系的方程组是

```
>eq1:=2*x+3*y+5*z+w=0;
 eq2:=-x+8*y+2*z+5*w=0;
 eq3:=2*x+4*y+9*z-7*w=0;
```

至此，显然矩阵记号是表示给定的线性方程组的便利的方式.

练 习

1. 给定一个线性方程组的增广矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,-2,a],[-1,3,5,b],[0,5,3,c]]);
```

(1)写出与这个矩阵相联系的非齐次方程组；

(2)对于参数 a、b 和 c 的任意选择，方程组有解吗？是否存在 a、b 和 c 的选择，使得这个方程组有无穷多个解？

2. 给定线性方程组

```
>eq1:=x-y+z-2*w=0;
 eq2:=2*x+3*y-4*z+w=1;
 eq3:=-3*x+6*y-3*z+w=2;
 eq4:=-x+y+6*z-k*w=2;
```

(1)写出与这个方程组相联系的系数矩阵；

(2)写出与这个方程组相联系的增广矩阵；

(3)求出 k 的值，使得这个方程组是不相容的.（提示：你可以从 -11 到 -15 的范围内选择 k 的值.在这个范围内你能猜出 k 的这个值吗?）

课 文 1.5

基本的线性代数算法

在课文 1.3 里讨论的三种初等行变换能够用来把线性方程组的增广矩阵化简成一个矩阵,并从它可以推导出这个方程组是否相容.如果这个方程组是相容的,我们如何求出解.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(Linsys);
```

化简方程组

例 5.1 假设我们给定方程组

```
>eq1:=x1+2*x2-3*x3=4;
  eq2:=-3*x1-6*x2-5*x3=7;
  eq3:=-x1+5*x2-11*x3=12;
```

与这方程组相联系的增广矩阵是

```
>AUG:=matrix([[1,2,-3,4],[-3,-6,-5,7],[-1,5,-11,12]]);
```

我们想得到一个与原方程组等价的方程组,它较容易求解.

我们在 AUG 上施行初等行变换,从第二个和第三个方程消去 x_1.对于施行这些变换的 Maple 的命令是:

- 用 3 乘第 1 行并且加到第 2 行上

```
>AUG1:=addrow(AUG,1,2,3);
```

- 用 1 乘第 1 行并加到第 3 行上

```
>AG2:=addrow(AUG1,1,3,1);
```

然后我们从所得的方程组的第三个方程消去 x_2.

- 互换第 2 行和第 3 行的位置

```
>AUG3:=swaprow(AUG2,2,3);
```

- 用 1/7 乘第 2 行

```
>AUG4:=mulrow(AUG3,2,1/7);
```

- 用 -1/14 乘第 3 行

```
>AUG5:=mulrow(AUG4,3,-1/14);
```

矩阵 AUG5 称为 AUG 的**阶梯形**.与 AUG5 相联系的新的方程组是

```
>eq1:=x1+2*x2-3*x3=4;
 eq2:=x2-2*x3=16/7;
 eq3:=x3=-19/14;
```

这个方程组等价于原方程组,因为它是通过一系列初等行变换得到的.

我们如何从原来的增广矩阵 AUG 得到矩阵 AUG5? 为了得到矩阵 AUG 的阶梯形,我们施行一系列初等行变换直到得出像上例子中的 AUG5 的形式.

化简了的矩阵 AUG5 或者新的方程组告诉我们关于原方程组的解的什么信息? AUG5 的最后一行(等价地,即新方程组的第 3 个方程)表明这个方程组是**相容的**并且有**唯一解**.

你能够提出原方程组作什么样的改变,使得新的方程组有无穷多个解? 你可以把矩阵 AUG

```
>AUG:=matrix([[1,2,-3,4],[-3,-6,-5,7],[-1,5,-11,12]]);
```

的(3,4)元 12 改成 15,然后考虑新的增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,2,-3,4],[-3,-6,-5,7],[-1,-2,-11,15]]);
```

在新的矩阵 AUG 上施行一系列初等行变换:

```
>AUG1:=addrow(AUG,1,2,3);
>AUG2:=addrow(AUG1,1,3,1);
>AUG3:=mulrow(AUG2,2,-1/14);
>AUG4:=addrow(AUG3,2,3,14);
```

矩阵 AUG4 是 AUG 的阶梯形.与 AUG4 相联系的新的方程组是

```
>eq1:=x1+2*x2-3*x3=4;   eq2:=x3=-19/14;   eq3:=0=0;
```

矩阵 AUG 的阶梯形 AUG4 表明这个新的方程组是**相容的**,并且有**无穷多个解**.

你能够提出原方程组作什么样的改变,使得新的方程组没有解? 你可以把矩阵 AUG

```
>AUG:=matrix([[1,2,-3,4],[-3,-6,-5,7],[-1,5,-11,12]]);
```

的第三行改变,并且考虑新的增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,2,-3,4],[-3,-6,-5,7],[-2,-4,-8,15]]);
```

在新的矩阵 AUG 上施行初等行变换:

```
>AUG1:=addrow(AUG,1,2,3);
>AUG2:=addrow(AUG1,1,3,2);
>AUG3:=mulrow(AUG2,2,-1/14);
>AUG4:=addrow(AUG3,2,3,14);
```

矩阵 AUG4 是 AUG 的阶梯形.与 AUG4 相联系的新的方程组是

```
>eq1:=x1+2*x2-3*x3=4;   eq2:=x3=-19/14;   eq3:=0=4;
```

矩阵 AUG 的阶梯形 AUG4 表明这个新的方程组是**不相容的**.

我们已经使用了初等行变换把给定的矩阵化成**阶梯形**,以推导出相联系的线性方程组的相容性.下面是原方程组以及它的简化形式的表示.

$$\begin{array}{cc} \textbf{原方程组} & \textbf{简化方程组} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

基本算法

简化方程组应当具有下列性质：

- 任一行的第一个非零元必须是 1. 这称为首 1.
- 首 1 下方的所有元素必须化为 0.
- 第 i 行($i \geqslant 2$)的首 1 总是在前一行的首 1 的右边.
- 所有零行必须出现在矩阵的最下面.

所产生的矩阵是行**阶梯形**矩阵. 此外，如果

- 首 1 上方和下方的所有元素都是 0.

那么产生的矩阵是**简化行阶梯形矩阵**. 产生矩阵的行阶梯形的算法是**高斯**(Gauss)**消去法**. 产生矩阵的简化行阶梯形的算法是**高斯**(Gauss) - **若尔当**(Jordan)算法. 如果这两种形式中任一种产生于相容的线性方程组，那么我们应用**回代算法**到增广矩阵的简化形式以便得到原方程组的解.

学习过程

让我们仔细看一看高斯(Gauss)消去法. 键入矩阵并且调出函数 gausselim. 你可以选择你喜爱的例子来修改教材：你可以用你想要的任何例子做实验.

例 5.2 给定矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,-1],[2,4,6],[5,7,9]);
```

选择 gausselim 函数的论证程式

```
>gausselim(A);
```

如果产生的矩阵是一个线性方程组的增广矩阵，那么这个方程组是相容的还是不相容的？如果相容，它有多少个解？

例 5.3 给定矩阵

```
>A:=matrix([[5,2,-9,7],[2,4,6,11],[15,7,29,45]]);
```

求出这个矩阵的阶梯形

```
>gausselim(A);
```

如果产生的矩阵是一个线性方程组的增广矩阵，那么这个方程组是相容的还是不相容的？如果相容，它有多少个解？

例 5.4 给定矩阵

```
>A:=matrix([[3,1,-9,6],[4,6,1,1],[7,7,-8,7]]);
```

A 的阶梯形用下述函数求出

```
>Gausslim(A);
```

如果产生的矩阵是一个线性方程组的增广矩阵，那么这个方程组是相容的还是不相容的？如果相容，它有多少个解？

例 5.4 里矩阵 A 的简化行阶梯形能够用高斯(Gauss)－若尔当(Jordan)算法求出

```
>rref(A);
```

如果产生的矩阵是一个线性方程组的增广矩阵，那么这个方程组是相容的还是不相容的？如果相容，它有多少个解？

回代算法

现在让我们学习回代算法.

例 5.5 利用 backsub 解线性方程组，它的增广矩阵是

```
>A:=matrix([[1,3,5,6,15],[2,3,7,9,11],[4,9,17,21,41]])
```

首先把矩阵化成行阶梯形，利用 gausselim 的无步骤程式

```
>gausselim(A);
```

矩阵 A 的阶梯形是

```
>A1:=matrix([[1,3,5,6,15],[0,1,1,1,19/3],[0,0,0,0,0]]);
```

然后运用回代算法

```
>backsub(A);
```

为了学习这些算法，用你选择的矩阵或线性方程组重复例 5.4 和例 5.5.

练 习

在下面的练习里你可能需要利用自动函数 gausselim, rref 和 backsub.

1. 设线性方程组的增广矩阵是

```
>A:=matrix([[1,-1,3,e],[11,3,5,f],[-12,32,k,g]]);
```

(1)决定 k 的值，使得这个方程组有唯一解，这个解依赖于参数 e、f 和 g 吗？

(2)是否存在 k 的值，使得这个方程组有无穷多个解？如果有的话，这与参数 e、f 和 g 的选择无关，还是依赖于这些参数的值？

2. 给定矩阵

```
>A:=matrix([[3,-2,5,6],[-5,7,4,1],[-2,5,9,7]]);
 B:=matrix([[b1],[b2],[b3]]);
```

(1)求使得方程组 $Ax=b$ 至少有一个解的所有 3×1 矩阵 b；

(2)求出与第(1)小题得到的矩阵 b 相联系的方程组的所有解.

3. 给定点(1,1.5),(2,2.7),(3,4.1)和(4,5.1)，求出通过这些点的插值多项式

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

(**提示**：为了决定这个多项式，设法得到 a,b,c,d 的方程组.)

4. 齐次线性方程组的系数矩阵 A 是

```
>A:=matrix([[1,1,3,5,7,2],[6,3,0,2,9,4],[3,1,6,8,9,6],
           [10,5,9,15,25,12]]);
```

(1)写出这个齐次线性方程组；

(2)这个方程组有多少解？自由变量是什么？描述解集；

(3)描述非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解集，其中 b 是矩阵

```
>b:=matrix([[2],[4],[6],[12]]);
```

(4)用 10 代替 b 的最后一个元素 12，重复第(3)小题.

5.给定线性方程组

```
>eq1:=x+2y-kz=9;
 eq2:=2x-y+3z=6;
 eq3:=x+y+z=3;
```

(1)写出与这个方程组相联系的增广矩阵；

(2)运用适当的算法推断参数 k 的条件，使得这个方程组

(i)有唯一解；

(ii)无解.

(3)从方程组的简化形式回答下列问题：

(i)是否存在 k 的值，使得这个方程组有唯一解？

(ii)是否存在 k 的值，使得这个方程组无解？

6.一个投资商行挑选了 5 个投资公司来投资他们的一部分财产.这些投资公司的风险从低到高不等，且这些公司的利润如下

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
10%	20%	30%	40%	50%

总共 1 000 000 美元打算在这些公司中分配，以便在一年后达到计划利润 150 000 美元.下述策略被运用：投给 M_1 的钱的 2 倍与投给 M_2、M_3 的钱之和应当等于投给 M_3 的钱的 5 倍；投给 M_3 的钱与投给 M_4 的钱的 4 倍之和应当等于投给 M_2 和 M_3 的钱之和；投给 M_1、M_4 的钱与投给 M_2 的钱的 2 倍之和应当是投给 M_5 的钱的 5 倍.

(1)写出对这个问题建模的方程组；

(2)写出与这个方程组相联系的增广矩阵；

(3)为了达到预计的利润，应当投给每个公司多少钱？

指导实验 1.1

用图形表示

目　的

这个实验的目的是用图示方法和代数方法确定给定的线性方程组是否相容.如果它是相容的,利用回代算法来解这个方程组.

自动 Linglg 函数

在这个研究课题里,你将使用自动函数的交互程式:gausselim;rref;backsub.为了用这些函数帮助,在 Maple 的提示符:>上键入 ? 函数名;例如,? gausselim;

指　导

1. 为了执行一个陈述,用鼠标或键盘移动光标到该行上,并且按 enter 键.

2. 当执行一个函数时,如果需要的话,创设 Maple 的输入区域;否则,输出将不出现在所要求的位置上.

3. 执行下述命令以便装载软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

作业 1

这个作业的目的是用图示方法检查一个线性方程组是相容还是不相容.

活动 1

考虑下述线性方程组

```
>eq1:2*x-4*y=5;   eq2:=13*x+7*y=4;   eq3:=11*x+11*y=-1;
```

用 graph 程序显示这个方程组的图形.

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

根据该图形,这个方程组有唯一解,还是无穷多个解,或者无解? 如果有解,估计它的值.

活动 2

改变活动 1 里所给的方程组的一个方程,使得新的方程组没有解.键入新的方程组

```
>eq1:=
>eq2:=
```

```
>eq3:=
```

用函数 graph 显示新方程组的图形.

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

根据该图形,这个方程组是相容还是不相容?

活动 3

是否可能改变活动 1 里方程组的一个方程,使得新的方程组有无穷多个解?证明你的答案.

活动 4

用图示法确定下述方程组是否相容.

```
>eq1:=2*x+2*y+z=2;   eq2:=x+2*y+z=1;
>graph(eq1,eq2);
```

活动 5

添加一个方程到活动 4 的方程组上,使得新的方程组有**唯一解**.写出新的方程组

```
>eq1:=
>eq2:=
>eq3:=
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

添加一个方程到活动 4 的方程组上,使得新的方程组**无解**.写出新的方程组

```
>eq1:=
>eq2:=
>eq3:=
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

作业 2

这个作业的目的是用代数方法确定一个给定的线性方程组是相容还是不相容.如果它是相容的,用回代法解这个方程组.各个活动使用下述方程组:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
3x & + & 4y & - & 8z & + & 7t & + & 56m & = & 10 \\
 & & y & + & 9z & - & 7t & + & 100m & = & 9 \\
12x & + & 45y & + & 33z & - & 67t & + & 98m & = & 353 \\
-8x & - & 54y & + & 87z & & & + & 188m & = & 55 \\
x & + & 78y & - & 87z & + & t & & & = & 29
\end{array}$$

活动 1

这个方程组的系数矩阵是什么?(为了在 Maple 里输入一个矩阵,例如,键入

```
>A:=matrix([[3,4],[1,2]]);)
>A:=
```

活动 2

这个方程组的增广矩阵是什么?

```
>AUG:=
```

活动 3

利用 gausselim 的交互程式以便得出 AUG 的阶梯形(显示所有的初等行变换).

活动 4

键入产生的原增广矩阵的阶梯形

＞AUG1:=

通过分析矩阵 AUG1,这个方程组是相容的还是不相容的? 如果是相容的,这个方程组有多少个解?

活动 5

如果这个方程组是相容的,对 AUG1 运用 backsub 的交互程式以便确定解.

活动 6

改变这个方程组的一个方程以便构造一个方程组,它是无解的.键入新的增广矩阵.利用 gausselim 函数的无步骤程式证实你的回答.

活动 7

为了使新的方程组有无穷多个解,你至少需要改变原方程的多少个方程,作出解释.

键入新的方程组

＞eq1:=

＞eq2:=

＞eq3:=

＞eq4:=

＞eq5:=

键入增广矩阵

＞AUG:=

求出它的阶梯形.再次运用适当的算法来确定解集.写出解.推导伴随的齐次方程组的解.

额外实验题

1.某种食品含有 12% 的蛋白质和 18% 的碳水化合物.另一种食品含有 8% 的蛋白质和 25% 的碳水化合物.需要一种含有 10% 的蛋白质和 20% 的碳水化合物的混合食品.我们应当用每种食品多少来形成 300 磅这样的混合食品?

2.某商行想预报它的一种产品的销售额.这种产品在头三年的销售额(以千美元计)历史如下:

年	1	2	3
销售额	10	25	45

(1)一种模式是去求经过点(1,10)和(2,25)的直线的方程.求出这条直线的方程.点(3,45)在这条直线上吗? 它靠近这条直线吗?

(2)另一种模式是去求其图象经过点(1,10),(2,25)和(3,45)的 2 次多项式函数.求出这个 2 次多项式函数;

(3)这两种模式中哪一种将给出第 4 年销售额的更好的预报?

指导实验 1.2 线性方程组相容的条件

目 的

这个实验的目的是去求产生相容的线性方程组的参数的条件.如果相容,解出这个方程组并且解释这个解.

自动 Linalg 函数

在这个研究课题里,你可能需要使用下列自动函数:gausselim,rref,backsub.为了用任一函数帮助,在 Maple 的提示符>上键入? 函数名;例如>? gausselim;

指 导

1.为了执行一个陈述,用鼠标或键盘移动光标到该行上,并且按 enter 键.

2.当执行一个函数时,如果需要的话,创设 Maple 的输入区域;否则,输出将不会出现在所要求的位置上.

3.执行下述命令以便装载软件包

```
with(linalg):with(linsys);
```

作业 1

这个作业的目的是要决定一个线性方程组表示相容的方程组时参数的条件.各个活动使用下述线性方程组

$$\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 3 \\ 3x - 5y + 3z &= 5/2 \\ 17x + 2y + kz &= 8 \end{aligned}$$

活动 1

写出与这个方程组相联系的增广矩阵 AUG.

活动 2

在矩阵 AUG 上运用适当的算法来决定参数 k 的条件,使得这个方程组有唯一解或者无

解.从产生的矩阵回答下列问题:

(1)这个方程组有唯一解,如果 k 等于________.

(2)这个方程组无解,如果 k 等于________.

作业 2

在为某些应用建模中,线性方程组不是所有的约束都能知道.这个作业的目的是要决定一个线性方程组表示相容的方程组时参数的条件.各个活动使用下述线性方程组:

$$\begin{aligned} x+2y-11z &= d \\ 2x-5y+3z &= e \\ 5x+y-3z &= f \end{aligned}$$

活动 1

写出与这个方程组相联系的增广矩阵 AUG.

活动 2

在矩阵 AUG 上运用适当的算法推断参数 d,e 和 f 的条件,使得这个方程组是相容的或者不相容的.从产生的阶梯形回答下列问题:

(1)这个方程组有无穷多个解,如果 d、e 和 f 满足关系________,此时,解是________.

(2)这个方程组无解,如果 d、e 和 f 满足关系________.

活动 3

有没有可能通过改变 x,y 或 z 的系数,使得产生的方程组有唯一解?用几个例子做试验,然后明晰地叙述你的结论.

额外实验题

考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[2,3,4,5],[8,2,5,1],[7,7,5,3]]);
 B:=matrix([[3,6,9,a],[4,5,0,b],[3,1,5,c]]);
```

(1)确定 a,b 和 c 的值,使得矩阵 A 能够通过一系列初等行变换变成矩阵 B;

(2)识别把矩阵 A 变成矩阵 B 的行变换.

应用 1.1 营养模型

目 的

这个应用的目的是构建一个营养问题的数学模型,解这个模型,并且解释和分析所得结果.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

营养模型的描述

综合营养中心收到了2000磅食品的订单,这种食品包含5%的脂肪,12%的碳水化合物和15%的蛋白质.他们必须用5种配料混合成这种食品.下表给出了5种配料 a_1,a_2,a_3, a_4 和 a_5 的每一种含脂肪,碳水化合物,蛋白质的百分比和每磅的成本.

	脂肪	碳水化合物	蛋白质	每磅的成本(美元)
a_1	8	5	15	0.55
a_2	6	25	5	0.25
a_3	3	10	20	0.30
a_4	2	15	10	0.35
a_5	4	5	10	0.40

活动 1

写出描述配制这种食品所需要的每种配料的量的线性方程组.

活动 2

键入活动1中方程组的增广矩阵 AUG.

活动 3

为配制这种食品，有唯一的混合配料的方式吗？如果不是，你需要在每种配料上加上什么条件，才能得到可行解集？

活动 4

写出与配料相联系的成本函数.

活动 5

每种配料用多少量将给出最高成本？最低成本？

活动 6

这个公司的配料 a_5 存货过多，决定使用最大可能的 a_5 的量来配制这份订货. 求出配制这种 a_5 富裕的食品所用的每种配料的量以及总成本.

活动 7

如果配料 a_5 不再可用，为配制所要求的食品，其他配料需要的量是多少？

应 用 1.2

炼油厂模型

目 的

这个应用的目的是构建一个炼油问题的数学模型,解这个模型,解释和分析所得的结果.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

炼油厂模型的描述

一个石油公司在4个不同的地方经营4个炼油厂.每一个炼油厂生产4种产品:天然气(NG),加热油(HO),柴油(DO)和汽油(G).每个炼油厂生产这些产品的数量(以千桶计)和总的分派成本(以千美元计)由下表给出.

	NG	DO	HO	G	成本
R1	30	8	9	8	500
R2	10	35	8	10	800
R3	5	10	35	10	550
R4	10	14	11	35	700

活动 1

设 x,y,z,w 分别是每个炼油厂生产1000桶NG,DO,HO,G的固定成本.写出描述这个模型的线性方程组.

活动 2

写出与这个方程组相联系的增广矩阵 AUG.

活动 3

对于未知量 x,y,z 和 w,解这个方程组.这个解是可行解吗? 请解释.

活动 4

假设炼油厂 R1 的总分派成本必须被 50 000 美元约简(即,整除——译者注). 这将怎样影响每种产品的单位成本?

活动 5

由于柴油的需求,这个公司决定每个炼油厂的柴油的产量必须是加热油产量的 2 倍,而保持原来的表中分派成本不变. 这一方针将导致可行解吗? 请解释.

活动 6

如果对于活动 5 的回答是"不",那么这个公司的方针是在原来的表中每个炼油厂的柴油产量减少 10% . 这一变化将导致可行解吗? 请解释.

活动 7

如果对于活动 6 的回答是"不",这个公司必须修改它的方针. 公司将通知每个炼油厂根据下述准则挑选一种产品(NG,DO,HO,G)作为它生产的主要产品. 没有两个炼油厂选择同一个主要产品;每个炼油厂生产的主要产品的数量必须超过其他三个炼油厂生产的这种产品的数量总和;如果一个炼油厂已经有一个主要产品,那么它必须选那个产品,否则这个炼油厂必须增加产量最大的那个产品的产量以便符合上述准则.

这个方针将得到解吗? 如果不,用这个炼油厂的主要产品的不同的值做试验,并改变它的主要产品的数量直至得到一个正数解.

活动 8

为了得到正数解,矩阵的元素应满足什么条件? 请解释.

第二单元

矩阵代数

矩阵是表示线性方程组$Ax=b$和列表显示实验结果数据的方便的记号.因此,研究矩阵的性质,分解算法和集中研究常常在应用中出现的特殊矩阵是重要的.特征化和研究与线性方程组的可解性有关的矩阵的性质也是重要的.

课 文 2.1

矩阵的代数

实数集在二元运算加法和乘法下是封闭的，即，任意两个实数的和与积也是实数. 所有 $m \times n$ 矩阵组成的集合具有这个性质吗？

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

矩阵的相等

矩阵方程 $Ax = b$ 的求解要求比较矩阵. 因此，自然要问：什么时候两个矩阵相等？

例 1.1 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[x,x+y],[z,3]]);
 B:=matrix([[2,6],[2*z,w]]);
```

有 x, y, z 和 w 的值使得这两个矩阵相等吗？两个矩阵 A 和 B 相等，如果下列方程被满足

```
>eq1:=x=2;  eq2:=x+y=6;
 eq3:=z=2*z;  eq4:=3=w;
>solve([eq1,eq2,eq3,eq4],{x,y,z,w});
```

两个矩阵 A 与 B 相等，如果它们的对应元素都相等.

矩阵的加法

实数集在加法下是封闭的；即，任意两个实数 a 与 b 的和 $a+b$ 是一个实数. 所有 $m \times n$ 矩阵组成的集合在适当定义的加法下是封闭的吗？

例 1.2 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[a1,b1],[c1,d1]]);
>B:=matrix([[a2,b2],[c2,d2]]);
```

它们的和是

```
>A+B=evalm(A+B);
```

矩阵 $A+B$ 的元素与 A 和 B 的对应元素之间的关系是什么?

例 1.3　现在考虑两个较大的矩阵

```
>A:=matrix([[a1,b1,c1,d1],[e1,f1,g1,h1]]);
>B:=matrix([[a2,b2,c2,d2],[e2,f2,g2,h2]]);
```

它们的和是

```
>A+B=evalm(A+B);
```

矩阵 $A+B$ 的元素与 A 和 B 的对应元素之间的关系是什么呢?

例 1.4　考虑两个不同大小的矩阵

```
>A:=matrix([[4,1,2,7],[1,5,3,4]]);
  B:=matrix([[1,6,3],[5,6,8]]);
>A+B=evalm(A+B);
```

屏幕显示的"错误"蕴含这两个矩阵 A 与 B 的和不是合适定义的.为什么?

我们只能把同样大小的矩阵相加,产生的矩阵是通过把所给矩阵的对应元素相加得到的.所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合在加法下是封闭的.

矩阵加法的性质

回忆实数集在加法下满足下列性质:

- **交换律**　$a+b=b+a$
- **结合律**　$(a+b)+c=a+(b+c)$
- **加法单位元的性质**　$a+0=0+a=a$
- **加法逆的性质**　$a+(-a)=(-a)+a=0$

所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合具有类似的性质吗?

考虑下述矩阵的集合:

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34]]);
>B:=matrix([[b11,b12,b13,b14],[b21,b22,b23,b24],[b31,b32,b33,b34]]);
>C:=matrix([[c11,c12,c13,c14],[c21,c22,c23,c24],[c31,c32,c33,c34]]);
```

例 1.5　计算和 $A+B$

```
>'A+B'=evalm(A+B);
```

把所得结果与和 $B+A$ 比较

```
>'B+A'=evalm(B+A);
```

两个矩阵 $A+B$ 与 $B+A$ 相等吗?

这个例子表明**交换律**成立.你能够解释为什么这个命题对于任意两个 $m\times n$ 矩阵都是真的吗?

例 1.6　计算和 $(A+B)+C$

```
>'(A+B)+C'=evalm(evalm(A+B)+C);
```

把所得结果与和 $A+(B+C)$ 比较

```
>'A+(B+C)'=evalm(A+evalm(B+C));
```

两个矩阵 $(A+B)+C$ 与 $A+(B+C)$ 相等吗?

这个例子表明**结合律**成立.你能够解释为什么这个命题对于任意两个 $m\times n$ 矩阵都是

真的吗?

例 1.7 存在矩阵 Z 使得 $A+Z=A$ 吗?(**提示**:$a+0=a$ 对于任一实数 a 都成立.)矩阵 Z 是**零矩阵**,它的所有元素都是零.

例 1.8 存在矩阵 X 使得 $A+X=Z$ 吗?其中 Z 是零矩阵.试一试下述步骤

```
>'-1*A'=evalm((-1)*A);
>Z:=evalm(evalm(A)+evalm((-1)*A));
```

$(-1)*A$(或者 $-A$)称为 A 的**加法逆**,你怎样构造给定矩阵的加法逆?

所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合在加法下是封闭的.

交换律成立:

$$A+B=B+A$$

结合律成立:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

零矩阵 Z 是在加法下的单位元素:

$$A+Z=Z+A=A$$

矩阵 A 的加法逆是 $-A$:

$$A+(-A)=(-A)+A=Z$$

数量乘法

用一个实数乘一个矩阵的效果是什么?

例 1.9 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2],[3,4]]);
```

用数 k 乘矩阵 A

```
>k*A=evalm(k*A)
```

例 1.10 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,4,5],[5,7,9]]);
>k*A=evalm(k*A);
```

矩阵 kA 的元素与矩阵 A 的元素的关系如何?

用一个数乘一个矩阵的结果是用给定的数乘所给矩阵的每一个元素得到的矩阵.

数量乘法的性质

例 1.11 考虑下列矩阵

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34]]);
>B:=matrix([[b11,b12,b13,b14],[b21,b22,b23,b24],[b31,b32,b33,b34]]);
```

计算数量乘积 k_1A 和 k_2A 以及它们的和

```
>k1A:=evalm(k1*A);   k2A:=evalm(k2*A);
```

```
>k1A+k2A=evalm(k1A+k2A);
```

比较 k_1A, k_2A 之和与 $(k_1+k_2)A$

```
>(k1+k2)*A=evalm((k1+k2)*A);
```

对于任意矩阵 A, k_1A+k_2A 与 $(k_1+k_2)A$ 相等吗? 你能够解释为什么这个等式对于任意 $m\times n$ 矩阵 A 和任意数 k_1, k_2 都成立吗?

对于任意矩阵 A 与 B, $(kA+kB)$ 等于 $k(A+B)$ 吗?

例 1.12 考虑下列矩阵:

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34]]);
>B:=matrix([[b11,b12,b13,b14],[b21,b22,b23,b24],[b31,b32,b33,b34]]);
```

计算数量乘积 $k(A+B)$

```
>k(A+B):=evalm(k*(evalm(A+B)));
```

把结果与和 $kA+kB$ 比较

```
>kA+kB=evalm(evalm(k*A)+evalm(k*B));
```

你能够解释为什么这个等式对于任意 $m\times n$ 矩阵 AB 和任意数都成立吗?

对于任意矩阵 A, $(k_1k_2)A$ 等于 $k_1(k_2A)$ 吗?

你能够解释为什么这个等式对于任意 $m\times n$ 矩阵 A 与任意数 k_1, k_2 都成立吗?

矩阵乘法

实数集在乘法下是封闭的;即,对于任意两个实数 a, b, 乘积 $a*b$ 是实数. 对于所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合是这种情形吗?

例 1.13 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[4,1,2,7]]);
 B:=matrix([[1],[6],[3]]);
```

A 是 1×4 矩阵, B 是 3×1 矩阵. 考虑乘积 BA

```
>BA=multiply(B,A);
```

关于乘积 BA, 这告诉了我们什么? 乘积 BA 是用 3×1 矩阵 B 去乘 1×4 矩阵 A 得到的 3×4 矩阵. 如果我们用 A 乘以 B, 情况怎样?

```
>AB=multiply(A,B);
```

在这个情形下, 乘积 AB 没有定义.

例 1.14 现在考虑矩阵

```
>A:=matrix([[a1,a2,a3]]);
 B:=matrix([[b1],[b2],[b3]]);
>AB=multiply(A,B);
```

结果是一个实数.

矩阵乘法总是有定义吗? 两个矩阵的乘积(当有定义时)是一个矩阵吗? 对于任意两个矩阵 A 与 B, 乘积 AB 等于乘积 BA 吗?

这个乘法过程怎样进行? 利用函数 matrixmul 观察步骤.

例 1.15 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
>B:=matrix([[b11,b12],[b21,b22],[b31,b32]]);
```

乘积 AB 是

```
>matrixmul(A,B);
```

把这个与 Maple 的输出

```
>AB=multiply(A,B);
```

比较.

例 1.16 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3],[2,2,3],[3,-1,0]]);
  B:=matrix([[1,2],[2,2],[3,2]]);
```

乘积 AB 是

```
>matrixmul(A,B);
```

把这个与 Maple 的输出

```
>AB=multiply(A,B),
```

比较.

一个 $m\times n$ 矩阵 A 与一个 $n\times r$ 矩阵 B 的乘积是用 A 的第 i 行与 B 的第 j 列相乘并且把这个结果放在 (i,j) 位置上得到的矩阵,其中 $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,r$. 结果是一个 $m\times r$ 矩阵.

矩阵乘法的应用

矩阵乘法可以看成是一个给定的图象从一个位置到另一个位置的变换. 例如,假设我们给了由下述点集定义的 2 维图象.

```
>S:={[1,2],[1.2,2.1],[1.22,2.51],[1.4,3.2],[1.45,3.11],[1.5,2.3]};
```

调出函数 Geometry,它将根据下述矩阵的乘法把图象 S 变换成另一个图象 S_1:

```
>T:=matrix([[1,0],[0,-1]]);
>Geometry(T,S);
```

作为另一个例子,考虑由下述规则生成的半圆的 2 维图象:

```
>S:={ }:n:=40:for i to n do t:=(i-1)/n:
  S:=S union {[t,sqrt(1-t^2)]}:od:
```

调出函数 Geometry,它将根据下述矩阵的乘法把图象 S 变换成另一个图象 S_1:

```
>T:=matrix([[-1,0],[0,1]]);
>Geometry(T,S);
```

矩阵乘法的性质

所有非零实数组成的集合在乘法下满足**交换律**$(ab=ba)$,**结合律**$((ab)c=a(bc))$,**分配律**$(a(b+c)=ab+ac)$,**乘法单位元性质**$(a\cdot 1=1\cdot a=a)$,以及**乘法逆性质**$(a\cdot\frac{1}{a}=1$ 当 $a\neq 0)$. 所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合具有类似的性质吗?

例 1.17 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[a11,a12],[a21,a22]]);
>B:=matrix([[b11,b12],[b21,b22]]);
```

$AB=BA$ 吗?

```
>AB=multiply(A,B);
>BA=multiply(B,A);
```

一般地,AB 不等于 BA.

通过选择三个矩阵 A,B 和 C,检查下列性质是否成立:

- **结合律** $(AB)C=A(BC)$
- **分配律** $A(BC)=AB+AC$

总结

矩阵乘法不是总有定义的.
交换律不总是成立的.
结合律成立:$(AB)C=A(BC)$
分配律成立:$A(B+C)=AB+AC$

我们仍需要详细阐述矩阵的**乘法逆性质**.对于一个未知量 x 的数量方程 $ax=b$,解是 $x=\frac{b}{a}$ 或 $x=a^{-1}b$,当 a 不等于 0.什么是关于矩阵方程 $Ax=B$ 的等价的命题?

练 习

在这些练习里你有可能需要使用下列 Maple 的命令

- **键入一个矩阵**
  ```
  >S:={[a,b,c],[1,2,3],[4,6,7]};
  ```
- **把两个矩阵相加**
  ```
  >C:=evalm(A+B);
  ```
- **把两个矩阵相乘:**
  ```
  >C:=multiply(A,B);
  ```
- **用一个数 k 乘一个矩阵 A**
  ```
  >C:=evalm(k*A);
  ```
- **抽出矩阵 A 的一行(列)**
  ```
  >r[i]:=row(A,i);   c[i]:=col(A,i);
  ```

1. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[0,1],[-1,-1]]);
```

对于任意正整数 n 给出计算 A 的 n 次幂的公式.(提示:计算 A 的较小的方幂,然后推导这

公式.)

2.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[x,1],[0,x]]);
```

通过计算 A 的几个方幂,推导出 A 的 n 次幂 A^n 的一般公式.你能够描述当 $n\to\infty$ 时,A^n 的元素会发生什么情况吗?

3.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[0.35,0.35,0.35],[0.25,0.25,0.25],[0.4,0.4,0.4]]);
```

通过计算 A 的较小的方幂,推导出 A^n 当 $n\to\infty$ 时的值.你能够构造一个矩阵 B,使它的元素的性质类似于矩阵 A 吗?请解释构造过程.

4.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2],[3,-1]]);   I2:=diag(1,1);
```

求出多项式 $p(x)$ 的系数 a, b 和 c

```
>p:=x->a*x^2+b*x+c;
```

使得 $p(A)=0$,其中 $p(A)=aA^2+bA+cI$.这个多项式是唯一的吗?

5.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,0],[0,-1]]);
```

$x-y$ 平面上的点(1,2)能移表示成 2×1 矩阵

```
>P:=matrix([[1],[2]]);
```

求出乘积 AP

```
>multiply(A,P);
```

确定产生的点的位置.它的原来的点(1,2)比较如何?

课文 2.2 特殊类型的矩阵

在这篇课文里我们介绍特殊类型的矩阵的性质，它们将贯穿本课程的剩下部分.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

对角矩阵

对角矩阵是对角线以外的元素都是 0 的方阵. 例如，生成具有对角元 1,2 和 5 的 3×3 对角矩阵的 Maple 命令是

```
>D1:=diag(1,2,5);
```

生成具有对角元 a,b,c 和 d 的 4×4 对角矩阵的命令是

```
>D2:=diag(a,b,c,d);
```

单位矩阵

单位矩阵是对角元都等于 1 的对角矩阵. 3×3 单位矩阵是

```
>I3:=diag(1,1,1);
```

4×4 单位矩阵是

```
>I4:=diag(1,1,1,1);
```

回想在实数集中，数 1 起着乘法单位元的作用；即，对于任意实数 a，$a*1=1*a=a$. 对于矩阵有类似的命题吗？任一方阵 A 用与之联系的单位矩阵乘得的结果是什么？

例 2.1 考虑 3×3 矩阵 A 与 3×3 单位矩阵

```
>A:=matrix([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]);  I3:=diag(1,1,1);
>multiply(A,I3);
```

单位矩阵起着乘法单位元的作用.

在我们讨论其他类型的矩阵之前，我们介绍**矩阵的转置**.

一个 $m\times n$ 矩阵 A 的转置是通过互换 A 的行和列得到的.

例 2.2 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3],[2,2,4],[0,1,5]]);
```

矩阵 A 的转置是

```
>B:=transpose(A);
```

A 的转置的转置是

```
>C:=transpose(B);
```

考虑具有一般元素的 3×4 矩阵 A

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34]]);
>A^T=transpose(A);
>(A^T)^T=transpose(transpose(A));
```

A 与$(A^T)^T$之间的关系是什么? 利用下述函数检查

```
>transtrans(A);
```

例 2.3 考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
 B:=matrix([[b11,b12,b13],[b21,b22,b23],[b31,b32,b33]]);
```

有$(A+B)^T=A^T+B^T$吗? 利用下述函数检查

```
>trsum(A,B);
```

你得出什么结论? 一般地,这个命题为真吗?

对于下列 2×2 矩阵 A 与 B,$(AB)^T=B^TA^T$ 吗?

```
>A:=matrix([[a11,a12],[a21,a22]]);
 B:=matrix([[b11,b12],[b21,b22]]);
```

利用下述函数检查

```
>trproduct(A,B);
```

你得出什么结论? 一般地,这个命题为真吗?

对称矩阵

对称矩阵在许多物理和工程问题的公式表示中出现.让我们看一看满足性质 $A=A^T$ 的所有矩阵 A 组成的类.

例 2.4 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,5],[2,6,9],[5,9,11]]);
```

A 的转置是

```
>A^T=transpose(A);
```

一般地,矩阵 A 的元素必须满足什么关系,才能使 $A=A^T$?

为了用公式表示关于对称矩阵(与它的转置相等的矩阵)的一般命题,请提出更多的例子.

三角矩阵

三角矩阵在许多建模问题的公式表示中自然出现.这些矩阵称为上三角或下三角依赖

于主对角线下方或上方的所有元素是否都为 0，一个**上三角矩阵是**

```
>A:=matrix([[1,2,4],[0,5,0],[0,0,8]]);
```

一个**下三角矩阵**是

```
>B:=matrix([[1,0,0],[2,5,0],[0,6,0]]);
```

矩阵的行阶梯形是上三角矩阵的另一个例子．考虑矩阵

```
>A:=matrix([[2,3,5,6],[4,7,8,9],[9,7,5,3],[1,3,6,9]]);
```

求出它的行阶梯形

```
>B:=gausselim(A);
```

两个上三角矩阵的乘积是上三角矩阵吗？

例 2.5　考虑两个矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,5,1],[0,3,4,5],[0,0,1,4],[0,0,0,7]]);
 B:=matrix([[3,1,0,1],[0,9,1,1],[0,0,1,3],[0,0,0,3]]);
```

乘积是

```
>multiply(A,B);
```

三角矩阵的转置是三角矩阵吗？

例 2.6　考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,5,1],[0,3,4,5],[0,0,1,4],[0,0,0,7]]);
```

A 的转置是

```
>B:=transpose(A);
```

两个上(下)三角矩阵的和怎样？它是上(下)三角矩阵吗？

初等矩阵

运用单个初等行变换到单位矩阵上所得到的矩阵称为**初等矩阵**．

例 2.7　考虑 3×3 单位矩阵

```
>I3:=drag(1,1,1);
```

矩阵

```
>E1:=swaprow(I3,1,2);
```

是从单位矩阵 I_3 通过互换第 1 行和第 2 行得到的．矩阵

```
>E2:=mulrow(I3,3,2);
```

是从单位矩阵 I_3 通过用数 2 乘第 3 行得到的．矩阵

```
>E3:=addrow(I3,2,3,4);
```

是从单位矩阵通过把第 2 行的 4 倍加到第 3 行上得到的．矩阵 E_1,E_2,E_3 的每一个都是通过单独运用一次初等行变换得到的．

下列矩阵是初等矩阵的例子吗？

```
>E4:=diag(1,3,4);
>E5:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,1,1,0],[0,0,0,1]]);
```

矩阵 E_4 不是初等矩阵，这是因为 E_4 是对单位矩阵施行两次初等行变换得到的．E_5 是初等矩阵，这是因为它是从单位矩阵施行单个初等行变换得到的．

练　习

在下列练习里你可能需要使用自动函数 trproduct, transtrans, trsum, transpose, 以及 Maple 命令 mulrow(A,i,n)①, swaprow(A,i,j), addrow(A,i,j,n)②, 以及 gausselim.

1. 考虑使用 Maple 的命令得到的具有随机元素的 3×3 矩阵 A

```
>A:=randmatrix(3,3);
```

计算 A 与它的转置的乘积. 产生的矩阵是对称矩阵吗? 如果是, 你能给出论据来支持你的断言吗?

2. 考虑矩阵 A, 它的 (i,j) 元由 $A[i,j]=\frac{1}{i+j-1}$ 给出. 这样的矩阵称为 **Hilbert 矩阵**. 一个 3×3 Hilbert 矩阵能够利用下述 Maple 程序生成:

```
>A:=matrix(3,3);
>for in from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do
  A[i,j]:=1/(i+j-1);od;od;print('A=',A);
```

(1) Hilbert 矩阵是对称矩阵吗?

(2) 解方程组 $Ax=b$, 其中

```
>b:=matrix([[0],[1],[2]]);
```

写出增广矩阵, 求出阶梯形, 并且运用回代法.

3. 下列矩阵中哪些是初等矩阵的例子, 为什么?

```
>A1:=matrix([[1,0,2],[0,1,0],[0,0,1]]);
>A2:=matrix([[1,0,0],[0,7,0],[0,0,1]]);
>A3:=matrix([[1,0,0],[1,1,0],[3,0,1]]);
>A4:=matrix([[1,0,0],[0,1,-4],[0,0,1]]);
```

4. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3,4],[4,1,2,3],[3,4,1,2],[2,3,4,1]]);
```

用矩阵 V 从右边乘矩阵 A:

```
>V:=matrix([[1],[1],[1],[1]]);
```

产生的矩阵的元素与 A 的行的关系如何?

用不同大小的矩阵做试验, 以便提出关于这个关系的一般命题. 这样的矩阵称为**循环矩阵**.

5. 给出一个例子说明对矩阵 A 施行初等行变换, 等价于用相应的初等矩阵从左边乘矩阵 A.

---

① 原书为 mulrow(A,i,j,n), 应当是 mulrow(A,i,n)——译者注.
② 这是译者加的——译者注.

课文 2.3 奇异矩阵

奇异矩阵出现在许多工程问题的公式表示中.奇异矩阵的性质使线性方程组的可解性清楚地显示出来.

初始化软件包

```
with(linalg):with(linmat);
```

非齐次线性方程组的系数矩阵

让我们从方程的数目等于未知量数目的线性方程组相联系的矩阵的例子出发.

例 3.1 非齐次线性方程组的增广矩阵是

```
>AUG:=matrix([[1,3,6,7],[1,5,8,4],[3,13,22,15]]);
```

对 AUG 运用高斯(Gauss)消去法

```
>B:=gausselim(AUG);
```

矩阵 B 告诉了我们关于由 AUG 表示的方程组的解集什么?

让我们运用回代法解这个方程组

```
>backsub(B);
```

这个方程组是相容的,它有无穷多个解.对这个方程组,让我们调查与之相联系的系数矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,6],[1,5,8],[3,13,22]]);
```

对 A 运用高斯(Gauss)消去法

```
>B1:=gausselim(A);
```

这个例子说明基底方程组有无穷多个解.注意与系数矩阵 A 对应的阶梯形矩阵 B_1 有一个零行.

例 3.2 稍微改变矩阵 AUG.考虑增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,3,6,7],[1,5,8,4],[3,13,22,1]]);
```

对 AUG 运用高斯(Gauss)消去法

```
>B:=gausselim(AUG);
```

矩阵 B 告诉了我们关于用 AUG 表示的方程组的解集什么?

让我们运用回代法解方程组

```
>backsub(B);
```

让我们调查与这个方程组相联系的系数矩阵.系数矩阵 A 是

```
>A:=matrix([[1,3,6],[1,5,8],[3,13,22]]);
```

运用高斯(Gauss)消去法

```
>B1:=gausselim(A)
```

稍微修改增广矩阵导致方程组不相容.注意与系数矩阵对应的阶梯形矩阵 B_1 有一个零行.

例 3.3　现在改变例 3.2 的矩阵 AUG.考虑增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,3,6,7],[1,5,8,4],[3,13,2,1]]);
```

对 AUG 运用高斯(Gauss)消去法

```
>B:=gausselim(AUG);
```

矩阵 B 告诉了我们关于用 AUG 表示的方程组的解集什么?

让我们运用回代法解这个方程组

```
>backsub(B);
```

让我们调查与这个方程组相联系的系数矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,6],[1,5,8],[3,13,2]]);
```

运用高斯消去法

```
>B1:=gausselim(A);
```

这一点修改导致方程组有**唯一解**.注意与系数矩阵 A 对应的阶梯形矩阵 B_1 的最后一行不是零行.

在例 3.1—3.3 中,与增广矩阵 AUG 相联系的系数矩阵决定用 AUG 表示的方程组是否有唯一解.

回想解数量方程 $a*x=b$,其中 a 和 b 是实数,下列法则之一必定成立:

- 如果 $a=0$ 且 $b=0$,则方程有无穷多个解.
- 如果 $a=0$ 且 b 不等于 0,则方程没有解.
- 如果 a 不等于 0,则方程有唯一解,它由 $x=a^{-1}*b$ 给出(其中 a^{-1} 是 a 的乘法逆).

对于线性方程组 $AX=B$,其中 A 和 B 是已知矩阵且 X 是未知量,我们有下列类似情形:

就像例 3.1 那样,线性方程组有无穷多个解.在例 3.2 中,方程组没有解.在这两个例子中,我们称系数矩阵是**奇异的**,注意简化的阶梯形矩阵 B_1 至少有一个零行.

在例 3.3 中,线性方程组有唯一解,并且系数矩阵是**非奇异的**.类似于数量方程的情形,矩阵 A 必定有乘法逆.注意简化阶梯形矩阵 B_1 没有零行.

非奇异矩阵

例 3.4　考虑矩阵

```
>A:=matrix([[2,4,6],[4,6,7],[8,5,2]]);
```

A 的逆是

```
>B:=linalig[inverse](A);
```

验证这点：

```
>AB=multiply(A,B);
>BA=multiply(B,A);
```

一个 $n\times n$ 矩阵 A 是非奇异矩阵当且仅当有一个 $n\times n$ 矩阵 B，使得乘积 $AB=BA=I$，其中 I 是单位矩阵．否则，A 称为奇异矩阵．矩阵 B 称为 A 的逆．

如果一个 $n\times n$ 矩阵有一个逆，则该逆是唯一的．（事实 2.1）

例 3.5　考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,0],[0,1,1],[1,2,1]]);
```

它的逆 A_1 是

```
>A1:=linalg[inverse](A);
```

$A=(A^{-1})^{-1}$吗?

```
>inv(inv(A))=linalg[inverse](A1);
```

如果 A 是 $n\times n$ 可逆矩阵，则 $(A^{-1})^{-1}=A$．（事实 2.2）

考虑另一个非奇异矩阵 B，以及它和矩阵 A 的乘积．

```
>B:=matrix([[0,2,1],[1,1,0],[1,2,1]]);
>C:=multiply(A,B);
```

取矩阵 A 和 B 的逆，设 $A_1=A^{-1}$，$B_1=B^{-1}$．

```
>A1:=linalg[inverse](A);
>B1:=linalg[inverse](B);
```

乘积 AB 的逆与 A 和 B 的逆的乘积之间的关系是什么?

两个非奇异矩阵的乘积是非奇异的吗?

```
>inv(A)*inv(B)=multiply(A1,B1);
>inv(B)*inv(A)=multiply(B1,A1);
>inv(AB)=evalm(linalg[inverse](c));
```

把 $A^{-1}B^{-1}$和 $B^{-1}A^{-1}$与乘积 AB 的逆作比较．你得出什么结论?

如果 A 和 B 是两个非奇异矩阵，则乘积 AB 的逆等于 B 的逆乘以 A 的逆；即 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．（事实 2.3）

例 3.6　取下列两个矩阵

```
>A:=matrix([[5,6,7],[5,7,2],[6,7,11]]);
>B:=matrix([[5,6,7],[5,7,2],[15,19,16]]);
```

找出乘法逆存在的条件．先求出矩阵 A 和 B 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(A);
>B1:=rref(B);
```

矩阵 A 的简化行阶梯形与矩阵 B 的简化阶梯形之间的区别是什么?

矩阵 A 是行等价于单位矩阵．即，对 A 施行一系列初等行变换，我们得到单位矩阵．矩阵 B 不是行等价于单位矩阵．它们中哪一个有逆?

```
>linalg[inverse](A);
>linalg[inverse](B);
```

矩阵 A 有逆,而矩阵 B 的逆不存在.

一个 $n\times n$ 矩阵 A 是可逆的当且仅当它是行等价于单位矩阵.(事实 2.4)

非奇异矩阵和线性方程组

例 3.7 考虑齐次线性方程组,它的增广矩阵是

```
>HS:=matrix([[5,6,7,0],[5,7,2,0],[6,7,11,0]]);
```

通过实行高斯(Gauss)消去法,然后运用回代法可求出解

```
>HS1:=gausselim(HS);
>backsub(HS1);
```

这个齐次线性方程组有**平凡解**;你能对于 HS 的系数矩阵 A 说什么? 例如,A 的逆存在吗?

```
>A:=matrix([[5,6,7],[5,7,2],[6,7,11]]);
```

它的逆是

```
>linalg[inverse](A);
```

例 3.8 考虑与例 3.7 的可逆矩阵 A 相联系的非齐次线性方程组 NHS.它的增广矩阵是

```
>NHS:=matrix([[5,6,7,1],[5,7,2,15],[6,7,11,23]]);
```

通过实行高斯(Gauss)消去法,然后用回代法可求出解.

```
>NHS1:=gausselim(NHS);
>backsub(NHS1);
```

这个方程组有**唯一解**.

如果系数矩阵是非奇异的(可逆的),则非齐次性方程组有唯一解.(事实 2.5)

如果系数矩阵是非奇异的(可逆的),则齐次线性方程组仅有的解是平凡解.(事实 2.6)

总结

$n\times n$ 矩阵 A 是非奇的(可逆的)
当且仅当
A 行等价于单位矩阵
当且仅当
以 A 为系数矩阵的齐次方程组仅有零解
当且仅当
以 A 为系数矩阵的非齐次方程组有唯一解

练　习

在下列练习里你可能需要利用自动函数 gausselim, backsub, linalg[inverse](A),以及 multiply(A,b).

1.考虑下述线性方程组：

```
>eq1:=x-2*y+3*z-w=1;
>eq2:=2*x-y+z-3*w=1/2;
>eq3:=3/2*x-5*y-6*z=2;
>eq4:=x-4*y+6*z-7*w=-3;
```

(1)写出方程组的系数矩阵 A.

(2)矩阵 A 是非奇异的吗?

(3)如果 A 有逆,利用适当的 Maple 命令求出逆.

(4)利用第(3)小题的信息推导方程组的解.

(5)利用 gausselim 和 backsub 解这个方程组,确信你在第(4)小题中的答案.

2.考虑下述线性方程组：

```
>eq1:=x-2*y+3*z=1;
>eq2:=2*x-y+3*z=-5;
>eq3:=x-5*y+c*z=2;
```

(1)写出方程组的增广矩阵 A.

(2)求出矩阵 A 的阶梯形.

(3)选择 c 的值,使得方程组(i)无解;(ii)有唯一解.

(4)对于你选择的 c 的每个值,写出对应的矩阵.

(5)这些矩阵中哪一个是非奇异的?

(6)用你自己的话叙述第(3)小题和第(5)小题的结果之间的关系.

3.求出下列矩阵的简化阶梯形,以便决定它们的逆是否存在:

```
>A1:=matrix([[-1,2,-3,5],[7,9,1,2],[5,-9,-5,3],[8,5,6,4]]);
>A2:=matrix([[-1,2,-3,5,6],[7,9,1,2,11],[5,-9,-5,3,12],
            [11,2,-7,10,29],[-1,2,4,6,9]]);
```

说出你得出的结论,并给出理由.

4.求出矩阵 A,它的逆由下述矩阵给出

```
>B:=matrix([[1,-1,0,0,0],[0,1,-1,0,0],
            [0,0,1,-1,0],[0,0,0,1,-1],[0,0,0,0,1]]);
```

5.通过选择你自己的矩阵并且做一些试验,确定下列命题中哪些是不正确的,证明你的答案.根据你的调查,你能叙述这个命题的正确样式吗?

(1)任意初等矩阵是可逆的.

(2)对称矩阵的逆是对称矩阵.

(3)上三角矩阵的逆是下三角矩阵.

(4)下三角矩阵的逆是上三角矩阵.

(5)初等矩阵的逆是初等矩阵.

6.给出矩阵 A 和 B 的例子,以便确定是 $(AB)^{-1}$ 与 A^{-1} 和 B^{-1} 的乘积之间的关系.

(1)键入两个矩阵 A 和 B.

(2)计算推断你的答案的有关的量.

(3) $(AB)^{-1}$ 与 A^{-1} 和 B^{-1} 的乘积之间的关系是什么? 你能够证明你所得的结论吗?

7.给出矩阵 A 的例子,以便确定 A 的转置的逆与 A 的逆的转置之间的关系.

(1)键入矩阵

>A:=

(2)计算推断你的答案的有关的量.

(3)$(A^{-1})^{T}$ 与$(A^{T})^{-1}$之间的关系是什么?

(4)你能够证明你所得的结论吗?

8.调查上三角矩阵和下三角矩阵的性质.

(1)两个上三角矩阵的乘积是上三角矩阵吗? 键入两个 3×3 上三角矩阵.计算乘积,你的结论是什么?

(2)两个下三角矩阵的乘积是下三角矩吗? 键入两个 3×3 下三角矩阵.计算乘积,你的结论是什么?

(3)下三角矩阵与上三角矩阵的乘积是下三角或上三角矩阵吗? 键入两个 3×3 矩阵,一个是上三角,一个是下三角,计算它们的乘积.你的结论是什么?

课 文 2.4 矩阵的逆

经常用来构造一个矩阵的逆的一种算法是高斯(Gauss)－若尔当(Jordan)消去过程.但是在构造逆矩阵之前,我们需要检查这个矩阵的逆是否存在.根据我们在课文 2.3 中的讨论,一个 $n\times n$ 矩阵可逆当且仅当它行等价于单位阵.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

用 Gauss-Jordan 消去法求逆

Gauss-Jordan 消去过程的步骤是:

1.在给定的 $n\times n$ 矩阵 A 的右边添上同样级数的单位矩阵 I_n;即,得到形式为 $[A:I_n]$ 的矩阵.

2.运用一系列初等行变换把矩阵 A 变成单位矩阵.同样的一系列初等行变换把单位矩阵变成所要求的矩阵 A 的逆.

学习过程

运用函数 inverse 的论证程式仔细检查求 A 的逆的步骤,从菜单上选取 Gauss-Jordan 程序.

例 4.1 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,4,6],[6,4,9],[1,7,9]]);
>inverse(A);
```

必要的话,用你自己的矩阵重复,以便熟悉这一算法.

逆矩阵和线性方程组

正如在例 3.8 注意到的,如果线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵是可逆的,则这个方程组有唯一解,它由 $A^{-1}b$ 给出.

例 4.2 考虑方程组

```
>eq1:=x1+4*x2+6*x3=11;
  eq2:=6*x1+4*x2+9*x3=19;
  eq3:=x1+7*x2+9*x3=35;
```

这个方程组能够写成 $Ax=b$,其中

```
>A:=matrix([[1,4,6],[6,4,9],[1,7,9]]);
>b:=matrix([[11],[19],[35]]);
```

检查 A 的逆是否存在(利用无步骤程式)

```
>inverse(A);
```

于是 A 的逆是

```
>B:=matrix([[-9/7,2/7,4/7],[-15/7,1/7,9/7],
        [38/21,-1/7,-20-21]]);
```

因为矩阵 A 的逆是矩阵 B,所以,可用 B 乘 $Ax=b$ 的两边得出解

```
>x:=multiply(B,b);
```

这个解与我们直接从

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{x1,x2,x3});
```

得到的解一致.

在密码学中的应用

矩阵的逆的一个应用出现在研究消息的编码和译码的密码学中.

例 4.3 假设我们想送消息"LINEAR ALGEBRA TOOL."我们假设字母 $A,B,C,\cdots,Z$ 被映到数 1,2,3,…,26.例如,数 12 表示字母 L.句号被映到大于 26 的一个数,譬如数 30.我们假设消息仅包含数.因此,数集

$$\{12,9,14,5,1,18,30,1,12,7,5,2,18,1,30,20,15,15,12,30\}$$

表示消息"LINEAR.ALGEBRA.TOOL."这个消息用矩阵的形式表示,就是

```
>M:=matrix([[12,1,12,18,15],[9,18,7,1,15],
        [14,30,5,30,12],[5,1,2,20,30]]);
```

发送者和接收者知道的编码矩阵是

```
>C:=matrix([[-1,1,2,1],[0,2,-1,1],[0,0,4,1],[1,-3,2,0]]);
```

编码后的消息通过一个信道,它的输出是乘积 CM.在这个安排下,接收者将得到用下述矩阵表示的消息

```
>R:=multiply(C,M);
```

接收者得怎样把收到的矩阵 R 表示的消息译出来呢?为了译出这消息,接收者用编码矩阵 C 的逆去乘 R.编码矩阵 C 的逆是

```
>C1:=linalg[inverse](C);
```

接收者通过计算 C_1 和 R 的乘积译出消息

```
>multiply(C1,R);
```

相继地变换这个矩阵的第 1 列、第 2 列、…的元素便重新产生原来的消息.

例 4.4 利用例 4.3 的编码矩阵 C 译出下列消息

R:={36,-10,88,50,30,45,24,-32,8,17,16,2,34,37,110,44,46,69,70,0}

表示集合 R 所给的消息的矩阵是

```
>R:=matrix([[36,30,8,34,46],[-10,45,17,37,69],
           [88,24,16,110,70],[50,-32,2,44,0]]);
```

为了译出这消息，把矩阵 C^{-1}和 R 相乘. 首先求出 C 的逆

```
>C1:=linalg[inverse](C);
```

以及乘积 $C^{-1}R$

```
>multiply(C1,R);
```

然后译出这消息. 这个消息是什么?

练 习

在下列练习里你可能需要使用自动函数 inverse 和 Maple 命令 gausselim, backsub, rref, solve.

1. 对角矩阵

```
>A:=diag(1,2,3,4,5,6);
```

求出 A 的逆. 你能对于任意 $n\times n$ 对角矩阵的逆提出一般的命题吗? 你能证明你的命题吗?

2. 矩阵

```
>A:=matrix([[-7/5,-6/5,4/5,8/5],[-6/5,-3/5,2/5,4/5],
           [4/5,2/5,-3/5,-6/5],[8/5,4/5,-6/5,-7/5]]);
```

(1)求出 A 的逆A_1.

(2)计算矩阵 A 的前 10 个方幂的逆.

(3)计算矩阵 A 的前 10 个方幂.

(4)比较第(2)、(3)小题的结果. 你能推出一般的关系吗? 如果是,请证明你的答案.

3. 考虑由简单的 Maple 程序生成的矩阵

```
>A:=matrix(5,5);
>for i from 1 to 5 do for j from 1 to 5 do
  A[i,j]:=1/(i+j-1);od;od;print(`A=`,A);
```

(1)求 A^{-1}.

(2)说明 A^{-1}的第 i 行元素的和与第 i 列元素的和是相同的.

4. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[2,-1,0,0],[-1,2,-1,0],[0,-1,2,-1],[0,0,-1,2]]);
>B:=diag(3,3,3,3);
```

(1)计算 $A+B$,求出$(A+B)^{-1}$.

(2)计算乘积 $A(A+B)^{-1}B$.

(3)计算逆矩阵 A^{-1}和 B^{-1}.

(4)计算和 $A^{-1}+B^{-1}$.

(5)计算第(4)小题中和的逆.

(6)比较第(2)、(5)小题的结果.

(7)推断一个公式.证明这个公式.

5.利用编码矩阵

```
>C:=matrix([[-1,1,2,1,1,1],[0,1,0,2,-1,1],[1,-1,0,0,4,1],
            [1,-3,0,1,2,0],[2,-1,2,3,-1,2],[0,1,-4,5,6,3]]);
```

译出加密后的消息

$$\{49,36,25,-8,93,38,-1,12,61,54,123,24,131,40,133,62,203,120,59,12,55,24,77,36,98,81,49,-31,115,216\}$$

这个消息是什么?

课 文 2.5

矩阵的行列式

行列式的概念与线性方程组的解有关.实际上,一个矩阵的行列式是一种测度,它可以用来确定与这个矩阵相联系的方的线性方程组的相容性.

初始化软件包

```
with(linalg):with(linmat);
```

行列式

例 5.1 考虑线性方程组

```
>eq1:=a*x+b*y=f1;
 eq2:=c*x+d*y=f2;
```

解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2},{x,y});
```

调查 x 和 y 的值的分母有相同的因式 $ad-bc$.

如果我们选择不同的方程组怎么样? 在解中将有类似的公共分母吗? 让我们检查一下.

例 5.2 考虑线性方程组

```
>eq1:=a11*x+a12*y+a13*z=f1;
 eq2:=a21*x+a22*y+a23*z=f2;
 eq3:=a31*x+a32*y+a33*z=f3;
```

解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

再次注意到对于所有 3 个变量 x, y 和 z,它们的分母是公共的.这个公共的数称为线性方程组的系数矩阵的行列式.

让我们利用 Maple 命令 dat(A)来计算某些矩阵的行列式:

```
>A:=matrix([[a,b],[c,d]]);
>det(A);
```

一个 2×2 矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积与对角线外元素的乘积之差.

这个算法对于较大阶数的矩阵是有点不方便和冗长乏味的.获得大的矩阵的行列式的一种方法称为**拉普拉斯(Laplace)展开**.

1.挑选一行(或一列)作为展开的行(列).

2.求出第 1 步中选择的行(列)的每个元素的子阵.元素 a_{ij} 的**子阵** M_{ij} 是划去第 i 行和第 j 列所得到的子矩阵.对于矩阵

```
>A:=matrix([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
```

元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的**子阵**分别由下式给出

```
>M11:=minor(A,1,1);
 M12:=minor(A,1,2);
 M13:=minor(A,1,3);
```

3.计算在第 1 步中选择的这一行(列)的每个元素的**余因子** C_{ij}.元素 a_{ij} 的余因子是 $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$:

```
>C11:=(-1)^2*det(M11);
 C12:=(-1)^3*det(M12);
 C13:=(-1)^4*det(M13);
```

4.计算第 1 步中选择的这一行的每个元素与它的余因子的乘积之和:

```
>det(A):=a11*c11+a12*c12+a13*c13;
>simplify(det(A));
```

这正好是我们实施 Maple 函数 det(A)得到的值:

```
>det(A);
```

行列式的性质

例 5.3 和与乘积的行列式.考虑下列矩阵

```
>A:=matrix([[2,5,7],[6,4,2],[8,4,1]]);
 B:=matrix([[3,7,7],[9,6,2],[11,4,15]]);
```

$\det(A+B)$ 等于 $\det(A)+\det(B)$ 吗?

考虑矩阵 A、B 与 $C=A+B$ 的行列式

```
>a:=det(A);  b:=det(B);  c:=det(A+B);
```

c 等于 $a+b$ 吗?

矩阵乘积的行列式 $\det(AB)$ 等于 $\det(A)\det(B)$ 吗?

```
>AB:=multiply(A,B);
```

矩阵 A,B 与 AB 的行列式

```
>a:=det(A);  b=det(B);  ab:=det(AB);
```

$a*b$ 等于 ab 吗?

从上述例子我们推断出:一般地,$\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$,然而

对于任意两个 $n\times n$ 矩阵 A 与 B,$\det(AB)=\det(A)\det(B)$.(事实 2.7a)

例 5.4 用数乘一个矩阵的效果. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[5,6,9,1],[2,5,7,1],[5,4,2,9],[0,7,2,6]]);
```

用数 k 乘矩阵 A:

```
>kA:=evalm(k*A);
```

计算并且求出矩阵 A 与它的数量倍的行列式之间的关系.

```
>det(A);  det(kA);
```

你观察到什么? 如果 A 是 4×4 矩阵,则 $\det(kA)=k^4\det(A)$.

如果我们选择一个 5×5 矩阵,那又如何?

```
>A:=matrix([[1,0,6,8,4],[3,5,9,10,2],[15,4,8,9,11],
            [0,17,12,6,5],[2,5,7,2,1]]);
```

用数 k 乘 A

```
>kA:=evalm(k*A)
```

计算并且求出矩阵 A 与它的数量倍的行列式之间的关系:

```
>det(A);  det(kA);
```

我们观察到什么? 如果 A 是 5×5 矩阵,则 $\det(kA)=k^5\det(A)$. 你能作出一般的命题吗?

如果一个 $n\times n$ 矩阵 A 被一个数 k 乘,则 $\det(kA)=k^n\det(A)$. (事实 2.7e)

例 5.5 两行互换的效果. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([2,5,7,3],[5,4,1,8],[8,6,4,5],[9,7,4,1]]);
```

交换矩阵 A 的相邻行

```
>B:=swaprow(A,2,3);
```

计算 A 与 B 的行列式

```
>det(A);  det(B);
```

你观察到什么? 明显地,$\det(B)=-\det(A)$.

如果不相邻的两行(列)互换又如何? 交换矩阵 A 的不相邻的行:

```
>B:=swaprow(A,4,1);
>det(B);
```

你观察到什么? 显然,$\det(B)=-\det(A)$.

如果互换给定矩阵 A 的任意两行得到矩阵 B,则 $\det(B)=-\det(A)$. (事实 2.7f)

例 5.6 把一行的倍数加到另一行的效果. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[3,5,7,9],[4,6,2,1],[7,8,5,3],[7,4,2,9]]);
```

把第 1 行的 3 倍加到第 2 行

```
>B:=addrow(A,1,2,3);
```

计算 A 与 B 的行列式

```
>a:=det(A);  b=det(B);
```

你观察到什么? 是 $a=b$ 吗?

如果一行的倍数加到另一行,则矩阵的行列式保持不变. (事实 2.7g)

例 5.7 三角形矩阵的行列式.考虑两个三角形矩阵,一个上三角,另一个下三角:

```
>U:=matrix([[3,5,6,7,8],[0,3,2,0,5],[0,0,2,5,0],
            [0,0,0,4,7],[0,0,0,0,2]]);
>L:=transpose(U);
```

在你执行下一个命令之前,你能猜出 U 和 L 的行列式的值吗?现在计算这些矩阵的行列式:

```
>det(U);  det(L);
```

U 或 L 的行列式与它的对角元的乘积之间的关系是什么?把对角元相乘

```
>3*3*2*4*2;
```

你能再次作出一般的命题吗?

三角形矩阵的行列式等于它的对角元的乘积.

例 5.8 考虑非奇异矩阵

```
>A:=matrix([[1,4,6,2],[6,3,1,7],[2,5,8,9],[7,5,1,2]]);
```

回忆矩阵 A 的简化阶梯形是单位矩阵

```
>rref(A);
```

这告诉我们矩阵 A 是行等价于单位矩阵的.因此,A 是非奇异的.A 的行列式是什么?

```
>det(A);
```

行列式不是零.

现在考虑矩阵

```
>A:=matrix([[5,6,7,4,5],[3,2,4,7,8],[4,3,5,6,7],
            [7,5,9,13,15],[4,3,1,6,9]]);
```

矩阵 A 是行等价于单位矩阵的吗?

```
>rref(A);
```

矩阵 A 不是行等价于单位矩阵的.因此,A 是奇异的,再一次计算 A 的行列式

```
>det(A);
```

你能作出一般的命题吗?

一个 $n\times n$ 矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $\det(A)$ 不是 0.(事实 2.8)

解线性方程组的克拉默(Cramer)法则

克拉默(Cramer)法则是根据行列式求解线性方程组的一种方法,方程组必须是方的;[1]并且系数矩阵必须是非奇异的,即它的行列式是非零数(事实 2.10 和事实 2.11).

例 5.9 考虑方程组

```
>eq1:=x-3*y+4*z=2;
 eq2:=-x-4*y+3*z=-2;
 eq3:=2*x-5*y+6*z=5;
```

系数矩阵是

① 即,方程个数与未知量个数相等——译者注.

```
>c:=matrix([[1,-3,4][-1,-4,3],[2,-5,6]]);
```

把矩阵 C 的第 1 列用方程组的右边代替得到矩阵 A_1

```
>A1:=natrix([[2,-3,4],[-2,-4,3][5,-5,6]]);
```

求出变量 x 的值

```
>x=det(A1)/det(C);
```

把矩阵 C 的第 2 列用方程组的右边代替得到矩阵 A_2

```
>A2:=matrix([[1,2,4],[-1,-2,3],[2,5,6]]);
```

求出变量 y 的值

```
>y=det(A2)/det(C);
```

把矩阵 C 的第 3 列用方程组的右边代替得到矩阵 A_3

```
>A3:=matrix([[1,-3,2],[-1,-4,-2],[2,-5,5]]);
```

求出变量 z 的值

```
>z=det(A3)/det(C);
```

注意这个解与用

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

得到的解一致.

试一试创造你自己的例子.

总结

一个 $n\times n$ 矩阵 A 是非奇异的(可逆的)
当且仅当
A 行等价于单位矩阵 I_n
当且仅当
矩阵 A 的行列式不是 0
当且仅当
以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解
当且仅当
以 A 为系数矩阵的线性方程组有唯一解

练 习

在下列练习里你可能需要利用函数 inverse,det,gausselim,rref,backsub,multiply 以及 add.

1. 给定两个 8×8 矩阵 A 与 B,$\det(A)=-2$ 且 $\det(B)=12$,你能求出下列矩阵的行列式吗?

(1)这两个矩阵的乘积.

(2)和 $A+B$.

(3)A 的逆.

(4)这两个矩阵的乘积的逆.

(5)从矩阵 A 通过互换两行得到的矩阵 A_1.

(6)矩阵 A_2,它等于 $3A$.

2.运用克拉默(Cramer)法则解下列线性方程组

```
>eq1:=2*x-4*y+7*z-w=15;
 eq2:=3*x-5*y+4*z-2*w=13;
 eq3:=x+4*y+5*z-w=1;
 eq4:=2*x+y-7*z-8*w=12;
```

3.给定两个有一般元素的矩阵

```
>A:=matrix([[a,b],[c,d]]);   B:=matrix([[e,f],[g,h]]);
```

你能给出使得 $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ 的所有非奇异 2×2 矩阵的特征性质吗?

4.考虑点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$P_3(x_3,y_3)$.

(1)确定使得点 P_1,P_2 和 P_3 在同一条直线上的条件.提示:确定线段 P_1P_2 和 P_2P_3 的斜率.

(2)说明第(1)小题中的条件等价于 $\det(A)=0$,其中 A 是矩阵

```
>A:=matrix([[1,x1,y1],[1,x2,y2],[1,x3,y3]]);
```

5.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[0,1,1],[3,-2,1]]);
```

及一系列的初等矩阵

```
>E1:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[-3,0,1]]);
>E2:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,5,1]]);
>E3:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1/3]]);
>E4:=matrix([[1,-1,0],[0,1,0],[0,0,1]]);
>E5:=matrix([[1,0,0],[0,1,-1],[0,0,1]]);
```

(1)说明乘积矩阵 $E_5E_4E_3E_2E_1A$ 是单位矩阵.

(2)利用第(1)小题的结果计算 A 的行列式.

6.对于下述矩阵 A 重复第 5 题,但是首先构造一系列的初等矩阵以便把 A 化简成单位矩阵.

```
>A:=matrix([[1,-2,0,0],[-2,1-2,0],[0,-2,1,-2],[0,0,-2,1]]);
```

课　文 2.6　伴随矩阵

一个非奇异矩阵 A 的逆能够通过形成 A 的伴随矩阵来构造.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(linmat);
```

伴随矩阵算法的步骤如下：

1. 求出矩阵 A 的每个元素的余因子. 任一元素 a_{ij} 的余因子的定义是

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

其中 m_{ij} 是元素 a_{ij} 的子阵 M_{ij} 的行列式.

2. 把矩阵 A 的每个元素用它的余因子代替得到一个新的矩阵 C. 这个矩阵称为**余因子矩阵**.

3. 矩阵 C 的转置称为 A 的**伴随矩阵**，记作 $\mathrm{Adj}(A)$.

4. 于是 A 的逆通过用 $\frac{1}{\det(A)}$ 乘矩阵 $\mathrm{Adj}(A)$ 得到.

设 A 是 $n \times n$ 非奇异矩阵. 则 A 的逆由下式给出：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A). \text{（事实 2.9）}$$

学习过程

利用函数 inverse 的论证程式学习这个算法.

例 6.1　利用伴随矩阵求出下述矩阵的逆

```
>A:=matrix([[1,3,5],[5,3,6],[8,4,2]]);
>inverse(A);
```

观察

```
>Adjoint(A):=matrix([[-18,14,3],[38,-38,19],[-4,20,-12]]);
```

A 与它的伴随矩阵的乘积是矩阵

```
>multiply(A,Adjoint(A));
```

这是用矩阵 A 的行列式乘以单位矩阵.

用许多非奇异矩阵重复这个过程以便学习算法.

练 习

在下列练习里可能需要利用函数 inverse,det,gausselim,rref,backsub,multiply,add,minor(A,i,j),cofactor(A,i,j),以及 adjoint(A).

1. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,-2,3],[3,1,-2],[-2,3,1]]);
```

(1)求出第 2 行里元素 3,1,-2 的子阵.

(2)求出第 2 行里元素 3,1,-2 的余因子.

(3)构造伴随矩阵.

(4)推出 A 的逆.

(5)利用函数 inverse 的交互程式确认第(4)小题的答案.

2. 考虑矩阵

```
>A:=matrix(4,4);
>for i from 1 to 4 do for j from 1 to 4 do
  A[i,j]:=1/(i+j-1);od;od;print('A=',A);
```

(1)确定矩阵 A 的伴随矩阵 B.

(2)矩阵 A 与它的伴随矩阵的乘积 C 是什么?

(3)进行 det(A)和 C 的数量乘法.你得到什么?

(4)利用第(3)小题的结果写出矩阵 A 的逆.

3. 求出矩阵 A,已知它的行列式是 5,并且它的伴随矩阵是

```
>B:=matrix([[1,-3,4,5],[9,5,3,0],[4,-2,1,5],[8,3,8,1]]);
```

课文 2.7 LU－分解

矩阵 A 的 LU－分解是把矩阵 A 分解成下三角矩阵与上三角矩阵的乘积.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

让我们从 2×2 矩阵的简单例子开始.

例 7.1 设 A 是 2×2 矩阵

```
>A:=matrix([[1,2],[3,4]]);
```

高斯(Gauss)消去法产生上三角矩阵

```
>U:=gausselim(A);
```

矩阵 U 是通过把 A 的第 1 行的 -3 倍加到第 2 行上得到的.施行同样的变换到单位矩阵

```
>id:=diag(1,1);
```

上,得到初等矩阵 E_1

```
>E1:=addrow(id,1,2,-3);
```

E_1 和 A 的乘积是什么?

```
>U:=multriply(E1,A);
```

正如你看到的,$E_1A=U$.因为所有的初等矩阵是可逆的,所以 $A=(E_1)^{-1}U$.求出 E_1 的逆

```
>L:=linalg[inverse](E1);
```

于是矩阵 L 是下三角矩阵.如果我们用 U 乘 L,便回到矩阵 A

```
>LU=multiply(L,U);
```

把 A 表示成下三角矩阵和上三角矩阵的乘积称为 LU－**分解**.

学习过程

实行 LUdecomp 并且挑选论证程式来学习这个过程.

例 7.2 求出矩阵 A 的 LU－分解.

```
>A:=matrix([[1,3,6],[4,5,7],[6,3,1]]);
```

```
>LUdecomp(A);
```

用你喜欢的例子来重复以便学习这个过程.当你确信你已经学会 LU-分解时,进行到使用 LUcomp 的交互程式.

LU-分解和线性方程组

LU-分解是解线性方程组的又一种方法.

利用 LU-分解解方程 $Ax=b$ 所使用的步骤是:

1.把矩阵 A 分别分解成下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U.

2.用前代法对于 y 解辅助问题 $Ly=b$.

3.用回代法对于 x 解辅助问题 $Ux=y$.

例 7.3 考虑线性方程组

```
>eq1:=x1-x2+x3=10;
 eq2:=2*x1-x2+3*x3=6;
 eq3:=x1+3*x2+x3=5;
```

系数矩阵、未知量,以及方程组的右边由

```
>A:=matrix([[1,-1,1],[2,-1,3],[1,3,1]])
>x:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
>b:=matrix([[10],[6],[5]]);
```

给出.通过执行下述函数的无步骤程式求矩阵 A 的 LU-分解

```
>Ludecomp(A)
```

于是矩阵 A 能够分解成下三角矩阵与上三角矩阵的乘积

```
>L:=matrix([[1,0,0],[2,1,0],[1,4,-4]]);
>U:=matrix([[1,-1,1],[0,1,1],[0,0,1]]);
```

引进未知量 y

```
>y:=matrix([[y1],[y2],[y3]]);
```

以便形成矩阵方程 $Ly=b$

```
>multiply(L,y)=evalm(b);
```

这等价于方程组

```
>y1=10;  2*y1+y2=6;  y1+4*y2-4*y3=5;
```

利用前代法(先对 y_1 解,然后对 y_2 解,等等)

```
>y1:=10;  y2:=-14;  y3:=-51/4;
```

因此

```
>y:=matrix([[y1],[y2],[y3]]);
```

利用矩阵方程 $Ux=y$ 求解 x

```
>multiply(U,x)=evalm(y);
>x1-x2+x3=10;  x2+x3=-14;  x3=-51/4;
```

利用回代法得到解

```
>x1=43/3;  x2=-5/4;  x3=-51/4;
```

练　习

在下列练习里你可能需要利用自动函数 LUdecomp, inverse, multiply, gausselim, rref,以及 backsub.

1. 考虑方程组

```
>eq1:=2*x1+4*x2+6*x3+x4=12;
 eq2:=x1+11*x2+4*x3+7*x4=10;
 eq3:=3*x1+17*x2+13*x3+12*x4=15;
 eq4:=2*x1+18*x2+8*x3+13*x4=20;
```

(1)写出方程组的系数矩阵 A.

(2)求出矩阵 A 的 LU-分解.

(3)利用第(2)小题的分解解方程组.

2. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[3,5,7,9],[2,5,7,2],[5,4,6,9],[3,8,1,2]]);
```

以及它的 LU-分解的下三角矩阵

```
>L:=matrix([[3,0,0,0],[2,5/3,0,0],
            [5,-13/3,2/5,0],[3,3,-51,-4/8]]);
```

求出使得 $LU=A$ 的上三角矩阵 U.

3. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[13,5,17,9],[-2,5,-7,2],[5,14,6,-9],[3,-8,11,2]]);
```

以及它的 LU-分解的上三角矩阵

```
>U:=matrix([[1,5/13,17/13,9/13],[0,1,-19/25,44/75],
            [0,0,1,-733/324],[0,0,0,1]]);
```

求出使得 $LU=A$ 的下三角矩阵 L.

4. 非奇异矩阵

```
>A:=matrix([[0,1],[1,0]]);
```

有 LU-分解吗? 解释你的结果.

5. 奇异矩阵

```
>A:=matrix([[0,0],[1,2]]);
```

有 LU-分解吗? 如果有这样的分解,它是唯一的吗? 解释你的结果.

指导实验 2.1 矩阵的基本性质

目 的

这个实验的目的是研究矩阵代数和深入研究它们的性质,其中包含某些探索活动.

自动 linalg 函数

在这个实验里,你将使用自动函数 inverse,commute,trsum,trproduct,trinverse,transtrans,LUdecomp.要使用函数帮助,就在 Maple 提示符>? 后键入函数名;例如,>? Ludecomp;

指 导

1.为了执行一个命令,利用鼠标或是键盘移动光标至输入行,并且击'enter'.

2.当执行一个函数时,如果需要的话创设 Maple 的输入区域;否则,输出将不出现在所要求的区域内.

3.执行下列命令以便装载软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

作业 1

这个作业的目的是考察矩阵的基本运算和它们的性质.

活动 1

存在 x,y,z 的值使得矩阵A 等于矩阵B 吗? 其中

```
>A:=matrix([[x-1,2,1-y],[6,1,0]]);
>B:=matrix([[3,2,4],[x+z,1,y+z+1]]);
```

(1)满足矩阵 A 与B 相等的x,y,z 的方程是什么?

```
>eq1:=  ;  eq2:=  ;  eq3:=  ;  eq4:=  ;
```

(2)利用 Maple 的命令解方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{x,y,z});
```

(3)使得矩阵 A 和 B 相等的 x,y,z 的值是什么?

活动 2

1.求使得 $AB=BA$ 的所有 2×2 矩阵 A 与 B.考虑两个矩阵 A 与 B.

```
>A:=matrix([[a,b],[c,d]]);
>B:=matrix([[e,f],[g,h]]);
```

(1)形成乘积 AB 与 BA.

(2)写出从 $AB=BA$ 产生的方程组.

(3)解所得的方程组.

(4)写出满足性质 $AB=BA$ 的所有可能的矩阵 A 与 B 组成的集合.

2.具有一般元素的矩阵 A 是

```
>A:=matrix([[a,b],[c,d]]);
```

求出使得 $A^2=A$ 的所有 2×2 矩阵.

(1)形成乘积 A^2

```
>A2:=multiply(A,A);
```

(2)写出从 $A^2=A$ 产生的方程组.

(3)解所得的方程组.

(4)写出满足性质 $A^2=A$ 的所有可能的 2×2 矩阵组成的集合.

(5)根据第(4)小题,写出满足 $A^2=A$ 的 3×3 矩阵和 4×4 矩阵的例子.

注:满足 $A^2=A$ 的矩阵称为**幂等矩阵**.

3.具有一般元素的矩阵 A 是

```
>A:=matrix([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]);
```

给出 3×3 矩阵 A 等于它的转置的特征性质.(**提示**:比较 A 和它的转置的元素.)

活动 3

考虑矩阵

```
>A:=matrix([[x,1],[0,1]]);
```

(1)计算矩阵 A 的下列方幂:A^2,A^3 和 A^4.

(2)是否存在一种方式,你可以从它推断 A^n 的元素 $A^n[1,1]$? 如果是,这个元素是什么?

(3)是否存在一种方式,你可以从它推断 A^n 的元素 $A^n[1,2]$? 如果是,这个元素是什么?

(4)推断 A^n 的公式.键入这个公式.(**提示**:回忆几何级数的和.)

(5)存在 x 的值,使得 A^n 等于矩阵 B 吗? 其中,

```
>B:=matrix([[-1,1],[0,1]]);
```

作业 2

这个作业的目的是利用函数 inverse 的交互程式来确定矩阵的逆,然后用逆的术语写出线性方程组的解.

考虑矩阵

```
>A:=matrix([[-1,2,3],[4,2,8],[5,1,c]]);
```

(1)求出使矩阵 A 可逆的 c 的一切值.

(2)从第(1)小题中选择 c 的一个值,然后键入新的矩阵 A. 利用 inverse 的交互程式,分别使用高斯－若尔当方法和伴随矩阵方法计算逆矩阵. 显示所有步骤.

(3)利用矩阵 A 的逆矩阵求出方程组 $Ax=b$ 的两个解,其中

(i) b = vector([−1,2,4]);

(ii) b = vector([0,0,0]).

(4)一般地,如果系数矩阵 A 的逆存在,那么齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解是什么?

(5)一般地,如果系数矩阵 A 的逆存在,那么非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解是什么?

作业 3

这个作业的目的是考察和调查矩阵的一些有趣的性质.

下面是 **Hilbert 矩阵**

```
>A:=matrix(4,4):
>for i from 1 to 4 do for j from 1 to 4 do
  A[i,j]:=1/(i+j-1);od;od;print('A=',A);
```

活动 1

求出 Hilbert 矩阵 A 的逆矩阵 B.

活动 2

设 $Ax=b$ 是给定的线性方程组,其中

```
>b:=matrix([[1],[2],[3],[4]]);
```

求出方程组 $Ax=b$ 的解.

活动 3

把矩阵 b 的每一个元素加 1 得到矩阵 b_1:

```
>b1:=matrix([[2],[3],[4],[5]]);
```

然后用 b_1 代替 b,求出方程组 $Ax=b_1$ 的解.

活动 4

(1)把矩阵 B 的每一行的元素相加得出矩阵 C.

(2)计算 $Ax=b_1$ 的解与 $Ax=b$ 的解之差. 把这个差与第(1)小题中的矩阵 C 比较.

活动 5

把矩阵 b 的每一个元素加 2 得到矩阵 b_2,用 b_2 代替 b,重复活动 3 和活动 4.

活动 6

把矩阵 b 的每一个元素加 n 得到矩阵 b_n,用 b_n 代替 b,推广活动 5 的结果.

你能证明这个推广吗? 这仅仅是 Hilbert 矩阵的性质吗?

下面是**循环矩阵**:

```
>A:=matrix([[1,2,3,4,5],[5,1,2,3,4],[4,5,1,2,3],
           [3,4,5,1,2],[2,3,4,5,1]]);
```

活动 7

循环矩阵 A 的逆矩阵是循环矩阵吗?

活动 8

循环矩阵 A 的方幂是循环矩阵吗?

活动 9

计算矩阵 A 与下述矩阵 b 的乘积:

```
>b:=matrix([[3],[3],[3],[3],[3]]);
```

求出乘积 Ab 与矩阵 b 的关系.求出使 $AB=kB$ 的 k 的实数值,并且指出满足上式的所有非零矩阵 B 的特征性质,其中 B 是

```
>B:=matrix([[a],[b],[c],[d],[e]]);
```

你能够推广这个结果到任意 $n\times n$ 循环矩阵吗?

额外实验题

1.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[0.3,0.4,0.3],[0.5,0.3,0.2],[0.2,0.3,0.5]]);
```

(1)计算矩阵 A 的几个方幂.

(2)看上去 A 的方幂收敛于一个具有相等元素的矩阵吗?这个矩阵是什么?解释你的答案.

2.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[a,b],[c,d]]);
 B:=matrix([[e,f],[g,h]]);
```

(1)求两个 2×2 非奇异矩阵 A 和 B,使得

$$\det(A+B)=\det(A)+\det(B).$$

(2)指出满足

$$\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$$

的所有 2×2 非奇异矩阵 A 和 B 的特征性质.

(3)考虑矩阵

```
>A:=matrix([[-1,2,3],[2,5,8],[3,8,11]]);
```

如果 A 是对称矩阵,A 的方幂 $A^n(n=2,3,\cdots)$ 是对称矩阵吗?证明你的答案.

指导实验 2.2

多项式方程和矩阵

目　的

这个实验的目的是研究包含矩阵的多项式方程,并且继续研究矩阵的性质.也包括一些探索性活动.

自动 Linalg 函数

在这个实验里,你将使用自动函数 inverse, commute, trsum, trproduct, trinverse, transtrans 和 LUdecomp. 为了使用一个函数帮助,可在 Maple 提示符>? 后键入函数名;例如,>? LUdecomp;

指　导

1. 为了执行一个命令,利用鼠标或者键盘移动光标至该行,并且按"enter"键.

2. 当执行一个函数时,如果需要的话创设 Maple 的输入区域;否则输出可能不出现在所要求的位置上.

3. 执行下列命令以便装载软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

作业 1

这个作业的目的是考察矩阵的性质.设 A 是 5×5 矩阵,它的(i,j)元是

$$a[i,j]=\min(i,j),\quad i,j=1,2,3,4,5.$$

键入矩阵 A.

活动 1

求出矩阵 A 的简化行阶梯形.从简化行阶梯形推导下列问题的结论:

(1) A 的行列式是什么?

(2)矩阵 A 有逆吗?

(3)求出矩阵 A 的逆.所得的结果是**三对角矩阵**.

(4)说明矩阵 A 的逆能够分解成下三角矩阵、对角矩阵和上三角矩阵的乘积.

(5)你能够猜出矩阵 A^2 的第 1 行的元素吗？计算 A^2. 它的逆是三对角矩阵吗？你能够猜出 A^3 和 A^4 的逆中零元素(如果有的话)的位置吗？

活动 2

如果 A 是 $n\times n$ 矩阵,它的(i,j)元就像在活动 1 中那样为

$$a[i,j] = \min(i,j)$$

你从活动 1 中的计算能够得出有关下列问题的什么样的结论？

$\det(A)$； A 的逆； A 的转置； A 的方幂.

作业 2

这个作业的目的是研究包含矩阵的多项式表达式.

活动 1

考虑 2×2 矩阵

```
>A:=matrix([-2,0],[0,-2]);
```

和单位矩阵

```
>Id:=diag(1,1);
```

(1)说明 A 是多项式 $p(x)=x^2-4$ 的一个解,

```
>p:=x->x^2-4;
```

即,说明 $p(A)=A^2-4\mathrm{Id}=0$,其中 0 是 2×2 零矩阵.

(2)矩阵 A 是多项式方程 $p(x)=x^2-4$ 的唯一解吗？证实你的断言.

活动 2

考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,0],[3,4,1],[0,-1,1]]);
```

和单位矩阵

```
>Id:=diag(1,1,1);
```

(1)存在非平凡的 2 次多项式

```
>p:=x->a*x^2+b*x+c
```

使得 $P(A)=0$ 吗？

1. 计算 $p(A)=aA^2+bA+c\mathrm{Id}$.
2. 写出使 $p(A)=0$ 的方程组,其中 0 是 3×3 零矩阵.
3. 解所产生的关于 a、b 和 c 的方程组.
4. 你能得出什么结论？ $p(x)$是平凡的(零)多项式吗？

(2)存在非平凡的 3 次多项式

```
>q:=x->a*x^3+6*x^2+c*x+d
```

使得 $q(A)=0$ 吗？

1. 计算 $q(A)=aA^3+bA^2+cA+d\mathrm{Id}$.
2. 写出从 $q(A)=0$ 产生的方程组.
3. 对于系数 a、b、c 和 d,解上述方程组. 你能得出什么结论？ $q(x)$是非平凡的多

项式吗？$q(x)$是唯一的多项式吗？

4. 计算 $A - x\mathrm{Id}$，计算 $\det(A - x\mathrm{Id})$，并且把这个结果和第 3 小题的多项式 $q(x)$ 作比较.

(3)在矩阵 A 的级数与矩阵A 所满足的非平凡(平凡)的多项式的次数之间能推导出什么关系(如果有的话)?

作业 3

这个作业的目的是介绍求大的线性方程组的数值解的雅可比(Jacobi)方法. **雅可比(Jacobi)方法**的步骤如下:

假设有一个线性方程组 $Ax=b$，它的系数矩阵 A 是可逆的并且A 的所有对角元都不为 0. 我们能够把 A 写成两个矩阵的差：$A=M-N$，其中 M 是对角矩阵，它的对角元等于 A 的对角元. 则 $Ax=b$ 蕴含$(M-N)x=b$，并且这产生矩阵方程 $Mx=Nx+b$. 如果$\{x_k\}$是一个序列使得 $Mx_{k+1}=Nx_k+b$，$k=0,1,2,\cdots$；并且如果序列$\{x_k\}$收敛到 x^*，那么 x^* 是 $Ax=b$ 的解. 这个解的第 k 次迭代由 $x_k=M^{-1}*N*x_{k-1}+M^{-1}b$ 给出.

活动 1

利用雅可比(Jacobi)方法解下述方程组.

```
>eq1:=10*x1+x2-x3=18;
 eq2:=x1+15*x2+x3=-12;
 eq3:=-x1+x2+20*x3=17;
```

(1)写出系数矩阵 A 和右边的矩阵b

```
>A:=
>b:=
```

(2)写出矩阵 M 和N，其中 $A=M-N$.

```
>M:=
>N:=
```

(3)计算矩阵 $M^{-1}N$ 和$M^{-1}b$.

活动 2

以初始猜测出发

```
>x(0):=matrix([[0],[0],[0]]);
```

(1)利用公式 $x_k=M^{-1}*N*x_{k-1}+M^{-1}b$ 计算x_1.

(2)计算差矩阵 x_1-x_0.

(3)利用公式 $x_{k+1}=M^{-1}*N*x_k+M^{-1}b$ 迭代地计算 $x_2, x_3, x_4, \cdots$，当差矩阵 $x_{k+1}-x_k$里的每个元素的绝对值小于 0.0001 时停止.

额外实验题

1. 这个问题的目的是调查实数的几何级数与矩阵的几何级数之间的关系. 回忆实数的几何级数由下式给出

```
>s:=sum(x^i,i=0..infinity);
```

如果 $-1<x<1$,它的和是

```
>s:=sum(x^i,i=0..infinity);
```

考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1/2,0],[0,1/2]]);
```

计算矩阵 A 的无限和:

```
>sum(A^i,i=0..infinity);
```

(1)对于矩阵来说,与条件 $-1<x<1$ 等价的条件是什么?计算在某种意义上矩阵的度量.例如,矩阵 A 的 2 型范数是

```
>evalf(norm(A,2));
```

(2)求出矩阵 $A2=A^2,A3=A^3,A4=A^4$.

(3)从第(1)和第(2)小题,你能对于 $An=A^n$ 推导出一个公吗?写出这个公式.

(4)矩阵 Id,$A,A2,A3,\cdots,An$ 的(1,1)元的和是什么?

(5)计算矩阵 $Bn=\mathrm{Id}+A+A2+A3+\cdots+An$.

(6)当 n 趋向于无穷时矩阵 Bn 的每个元素的极限是什么?写出所得到的矩阵 B.

(7)求出矩阵 $C=A-\mathrm{I}$,其中 I 是单位矩阵.

(8)求出矩阵 C 的逆 C_1.

(9)把矩阵 C_1 与第(5)小题的矩阵 B 作比较,你能得出什么结论?

(10)矩阵的几何级数的和遵循实数的类似性质吗?

(11)你的结论对于任意 2×2 矩阵(不管它的范数)都成立吗?证明你的论断.(提示:考虑 2 型范数大于 1 的矩阵.)

2. 你能够对于 $n\times n$ 矩阵叙述一般的结果吗?

3. 用对角元全不为 0 的下三角矩阵代替矩阵 M,重复作业 3. 这个方法称为**高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)方法**.

应用 2.1 航线连接问题

目的

这个应用的目的是建立在各个城市之间连接航班的网络的数学模型. 想法是使用矩阵代数分析每一对城市之间的不同的航线.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linmat);
```

航线连接问题的描述

这个课题提出一个模型来决定在每一对城市之间是否有航班连接. 考虑为 8 个城市服务的一个航空公司:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
C_1		1						1
C_2						1		
C_3	1			1				
C_4							1	
C_5			1					
C_6				1				
C_7								1
C_8	1				1			

如果在 C_i 和 C_j 之间有直接的航线提供,则(i,j)元是 1;如果在 C_i 和 C_j 之间没有直接的航线,则(i,j)元是 0. 表示这个构形的矩阵称为**邻接矩阵**(accessibility matrix).

活动 1

键入邻接矩阵 A,它表示在不同的城市之间提供的航线.

活动 2

(1)用恰好两个航班有可能从 C_2 到达 C_4 吗？画出这两个城市之间的通路. 从 C_5 到达 C_1 用恰好两个航班，这可能吗？画出这两个城市之间的通路.

(2)从 C_4 到达 C_7 用恰好两个航班，这可能吗？从 C_6 到达 C_8 用恰好两个航班，这可能吗？给予证明.

活动 3

计算 A^2. A^2 的元素与你在活动 2 中的结论有什么关系？从 A^2 能够得到关于在城市之间连接航班的哪些其他信息？

活动 4

通过计算 A 的适当方幂，说明

(1)我们能够用恰好 3 个航班从 C_6 到 C_8 旅行；

(2)我们有多少种方式能够用恰好 3 个航班从 C_8 到达 C_1；

(3)我们能够用恰好 4 个航班从 C_4 到 C_3 旅行.

活动 5

一般地，解释矩阵 A 的各个方幂中产生的非零元的含意.

活动 6

计算 A 的前 3 个方幂的和，检查产生的矩阵. 在每一对城市之间用 3 个或较少的航班旅行这可能吗？

活动 7

在每一对城市之间用 6 个或较少的航班旅行，这可能吗？

应用 2.2

人口流动目标

目 的

这个应用的目的是利用从矩阵代数来的想法建立预测不同城市的人口数目的数学模型,并且解决这模型.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(linmat);
```

人口流动模型的描述

跟踪三个县的人口数目,人口普查办公室注意到每年一个人从 C_1 县搬家到 C_2 县的概率是 0.03,搬家到 C_3 县的概率是 0.02;从 C_2 县搬到 C_1 县的概率是 0.04,搬到 C_3 县的概率是 0.03;从 C_3 县搬到 C_1 县的概是 0.06,搬到 C_2 县的概率是 0.04.概率矩阵如下:

	C_1	C_2	C_3
C_1	0.95	0.03	0.02
C_2	0.04	0.93	0.03
C_3	0.06	0.04	0.90

设 x_n,y_n 和 z_n 分别表示 C_1,C_2 和 C_3 县在 n 年后的人口数目.

活动 1

写出表示 $n+1$ 年后每个县的人口数目的等式.

活动 2

把活动 1 的数据和人口数目用矩阵形式表示.这称为**转移矩阵(transition matrix)**A.

活动 3

如果 C_1,C_2 和 C_3 的初始人口(以千计)分别是 200,300 和 400,估计一年末每个县的人口数目.

活动 4

说明 1 年后每个县的人口数目等于初始人口数目的 A 倍.

活动 5

(1)估计 5 年后，10 年后，15 年后和 50 年后的人口数目.

(2)当 n 变得非常大时，每个县的人口数目将是多少？

(3)你认为从某 n 年起，每个县的人口数目最终将达到一个稳定值吗？

(4)在任一年，3 个县的人口数目的和是多少？

活动 6

假设由于疾病的传播和其他环境的因素，C_1、C_2 和 C_3 这三个县的人口数目每年分别按照固定的数目 a、b 和 c 减少.

(1)写出描述这个模型的方程.

(2)1 年末每个县的人口数目是多少？用初始人口数目和因子 a、b、c 表示.

(3)当 a、b、c 取什么值时，将导致 1 年末每个县的人口灭绝？

(4)当 a，b，c 取什么值时，将导致 10 年末每个县的人口灭绝？

应 用 **2.3**

神经网络

目 的

这个应用涉及计算机科学的一个领域——神经网络的主要特征和训练网络的方法，使得它对于给定的输入能够识别输出．对这些的分析显示了矩阵代数的效用．

初始化软件包

```
with(linalg);with(linmat);
```

神经网络的描述

神经网络描绘我们学习方式的模拟，如何把输入和输出联系起来．一个神经网络由输入集、层集和目标输出集组成．每一层由一些神经元组成．一个网络可以有一层或多层．输入通常不看成是层．从输入到神经元的每一个连接被指定一个权值．一个神经元也可以有一个“偏置信号”输入，其权值可以令为 1．每一层的输出是到下一层的输入．然后把输出层的最后输出与目标输出比较．如果最后输出“接近于”目标输出（譬如说，误差在 10% ～20% 以内），我们就说这个网络已经被训练．否则，这个过程继续下去并且相应地调整权值．

调整权值的一种方法是**向后传播算法**．我们首先调整输出层的权值，并且向后传播这个过程，一直到所有权值被调整．这个过程延续到这个网络对于给定的输入集产生所要求的输出．此时我们称这个网络已经被训练．神经网络把人类作出联想的方式模式化，人类通过加强某些联系和减弱其他联系作出联想，而这些可以由增加某些权值和减少其他权值达到．

在这个应用里，我们考虑**两层神经网络**．中间层有 3 个神经元，而输出层有 4 个神经元．

输入集是 $I=\{$偏置信号，红色，绿色，橙色，小的，平均，大的$\}$．每一个输入被指定 1 或者 0：如果这个性质成立，则为 1；否则为 0．例如，红色将与[1,1,0,0,0,0,0]发生联系（第一个元素 1 代表“偏置信号”，而第二个 1 代表红色）；类似地，绿色将与[1,0,1,0,0,0,0]发生联系；等等．

目标输出集是 $O=\{$苹果，甜瓜，樱桃，西红柿$\}$．每一个输出也被指定 1 或者 0：如果这个性质成立，则为 1；否则为 0．例如，苹果将与[1,0,0,0]发生联系；西红柿将与[0,0,0,1]发生联系；等等．

我们想使网络学习下列规则：

- **规则 a.** 如果绿色和平均，则苹果

$$[1,0,1,0,0,1,0] \to [1,0,0,0]$$

- **规则 b.** 如果橙色和大的，则甜瓜

$$[1,0,0,1,0,0,1] \to [0,1,0,0]$$

- **规则 c.** 如果绿色和大的，则甜瓜

$$[1,0,1,0,0,0,1] \to [0,1,0,0]$$

- **规则 d.** 如果红色和小的，则樱桃

$$[1,1,0,0,1,0,0] \to [0,0,1,0]$$

- **规则 e.** 如果红色和平均，则西红柿

$$[1,1,0,0,0,1,0] \to [0,0,0,1]$$

- **规则 f.** 如果橙色和小的，则樱桃

$$[1,0,0,1,1,0,0] \to [0,0,1,0]$$

每个输入以一个事先指定的随机权值 W_{ij} 和每个神经元 i 连接（$i=1,2,3;j=1,2,3,4,5,6,7$），产生输入权矩阵.这个矩阵和一个输入向量相乘的结果称为 **neti**，它表示到下一层的中间输出.

神经元以基于下述调节函数的强度激发中间输出：

```
>f:=t->1/(1+exp(-50*t));
```

（在调节函数里的因数 50 可以调整，因此可以有不同的调节函数）.

这些中间输出现在作为输出层的新的输入起作用，每一个新的输入以事先指定的随机权值 m_{ij} 和每个神经元 i 连接（$i=1,2,3,4;j=1,2,3,4$），产生输出权矩阵.这个矩阵与一个中间输出向量相乘的结果是网络的最后输出.把这个最后输出与目标输出比较.这个过程用不同的输入重复进行，每一次调整权值，直到这个网络学会这些规则.

活动 1

为了训练网络：

(1)随机地令所有给输入和偏置信号指定的权值 W_{ij} 是小的数，譬如说在 -0.1 和 0.1 之间.把这个 7×3 矩阵记作 Nb.键入矩阵 Nb.

(2)随机地令所有给目标输出指定的权值 m_{ij} 是小的数，譬如说在 -0.1 和 0.1 之间.把这个 4×4 矩阵记作 Mb，键入矩阵 Mb.

你打算训练网络学习两条规则：

- **规则 a.** 如果绿色和平均，则苹果.
- **规则 b.** 如果橙色和大的，则甜瓜.

输入规则 a，它可以表示成

```
>ga:=vector([1,0,1,0,0,1,0]);
```

注意第一个元素是 1 并且这是偏置信号.这件事总是成立.

(3)通过把 ga 和矩阵 Nb 相乘计算加权输入（$neti$）：

```
>neti:=
```

(4)运用调节函数到这个中间输出的每个分量上：

```
>fneti:=
```

(5)报告上述结果作为向量 v,它的第一个分量是偏置信号 1,而其他三个分量是第(4)小题的结果:

```
>v:=
```

(6)通过把向量 v 与矩阵 Mb 相乘计算加权中间输出.

(7)运用调节函数到所产生的向量.

(8)报告对于网络的规则 a 在这一序列的变换下的输出向量 r:

```
>r:=
```

把它和目标输出 oa 比较如何?

```
>oa:=vector([1,0,0,0]);
```

这个网络识别这个输出吗? 请解释你的回答.

活动 2

现在施行向后传播算法调整权值,并且输入规则 b.

(1)按照下述法则调整给输出层指定的权值 m_{ij}:

$$\text{新的 } m_{ij} = \text{原来的 } m_{ij} + 0.3d_j v_i$$

其中 0.3 是适当的学习因子(这可以调整但必须保持小的数),并且

$$d_j = r_j(1 - r_j)(T_j - r_j),$$

$j=1,2,3,4$; $i=1,2,3,4$.(T_j 是目标输出,而 v_j 是到输出层的输入.注意当 $T_j=r_j$ 或 $d_j=0$ 使得新的 m_{ij}=原来的 m_{ij} 时,出现平衡.)

(2)按照下述法则调整 w_{ij}:

$$\text{新的 } w_{ij} = \text{原来的 } w_{ij} + 0.3e_j r_i$$

其中

$$e_j = v_j(1 - v_j)\sum_{k=1}^{4} d_k m_{jk}$$

(注意当 $oa[k]=r[k]$ 使得新的 w_{ij}=原来的 w_{ij} 时,出现平衡).

你可以利用上述规则来更新矩阵 Mb 和 Nb,然后以新的输入规则 b 开始.

```
>UMB:=matrix(4,4);
>for i from 1 to 4 do for j from 1 to 4 do
  UMb[i,j]:=Mb[i,j]+0.3*r[j]*(1-r[j])*
  ((oa[j]-r[j]))*v[i];od;od;print(UMb)=evalm(UMb);
>UNb:=matrix(7,3);
>for i from 1 to 7 do for j from 1 to 3 do
  UNb[i,j]:=Nb[i,j]+0.3*v[j]*(1-v[j])*
  sum(r[k]*(1-r[k]))*(oa[k]-r[k])*Mb[j,k],k=1..4)*r[i];
  od;od;print(UNb=evalm(UNb));
```

重复活动 1 的第(3)—(8)小题,用规则 b 作为输入,分别用更新的矩阵 UMb 和 UNb 代替 Mb 和 Nb.把输出与目标输出 om 比较怎么样?

```
>om:=vector([0,1,0,0]);
```

你注意到输出的值的变化吗? 它更好地识别第一个规则.

活动 3

在两个输入规则 a 和 b 之间交替地重复活动 2 共 30 遍.(写出你自己的程序,否则使用

函数 trainnet.)

```
>trainnet(30);
```

输出表明这个网络已经被训练了吗？如果是，利用更新的矩阵 UNb 和 UMb 确认对于给定的输入，所要求的输出已达到.

活动 4

现在的想法是训练网络去识别规则 a、b 和 c，修改在活动 3 中写的程序以便适应新的情形. 运转这个程序几遍，直到你认为这个网络已经被训练. 对于给定的输入，这个网络能识别目标输出吗？如果是，那么学习已经出现.

活动 5

如果我们把调节函数改变成函数

```
>f:=t->1/(1+exp(-alpha*t));
```

将会怎么样？研究通过选取字母的不同的值这个网络的训练怎样受影响.

活动 6

研究如果中间层有 4 个或 5 个神经元代替 3 个神经元，网络的训练怎样受影响.

活动 7

研究用一层网络代替两层网络的效果.

第三单元

线 性 空 间

研究线性空间或者向量空间对于在一个数学结构内系统地阐述本课程的概念是重要的.把一个向量表示成一个向量组的线性组合在有限状态机器,图像处理,计算图论以及其他学科中是一个重要的问题.研究一个向量组的线性包的性质导致研究线性空间的基和维数,此外,线性空间的研究提供了一个框架把这些想法运用到不是欧几里得空间的空间.

课　文　3.1　线性空间介绍

我们已经遇到过在加法与乘法下封闭的集合.例如,实数集是在加法与乘法下封闭的.也有,所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合 M 在加法与数量乘法下是封闭的.集合 M 在加法下满足交换律,结合律,存在单位元素(零矩阵),有加法逆;并且在数量乘法下满足

$$(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$$
$$(k_1k_2)A=k_1(k_2A)=k_2(k_1A)$$
$$k_1(A+B)=k_1A+k_1B$$
$$1*A=A$$

其中 k_1、k_2 是任意数,A、B 是任意 $m\times n$ 矩阵.

在加法与数量乘法运算下满足这些性质的数学结构称为**线性空间**或者**向量空间**.在这个单元,我们将集中在**欧几里得空间**$\mathbb{R}^n$ 上

初始化软件包

```
>with(linalg):  wiht(linspace);
```

向量的概念

在欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 里一个向量是由 n 个分量组成的一个阵列,可以用来表示向量的 Maple 命令是

- v 是 3 个分量的向量
```
>v:=vector([1,5,2]);
```
- u 是 4 个分量都等于 0 的向量(零向量)
```
>u:=vector(4,0);
```
- u 是 5 个分量都等于 1 的向量
```
>u:=vector(5,1);
```
- 一个向量可以通过一个函数 f 说明
```
>f:=x->x^2;
```

```
>w:=vector(4,f);
```

向量怎样几何地表示？物理量例如力，速度，引力和加速度都是向量的例子. 向量被适当的点，方向和"长度"或"大小"特征化. 仅被大小特征化的量，例如速率和质量，表示数量.

向量代数

让我们调查所有向量在适当定义的加法和数量乘法运算下组成的结构的性质.

相 等

例 1.1 考虑两个向量

```
>v1:=vector([2,x-y,z,x+z]);
 v2:=vector([z,-2,2*x,3]);
```

建立使这两个向量的分量相等的方程

```
>eq1:=2=z;  eq2:=x-y=-2;  eq3:=z=2*x;  eq4:=x+z=3;
```

解所产生的方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{x,y,z});
```

于是这两个向量相等如果 $x=1,y=3$ 且 $z=2$.

两个向量相等当且仅当它们的对应分量都相等.

加 法

例 1.2 考虑 $\mathbb{R}^2$ 里的两个向量

```
>v:=vector([1,3]);
 u:=vector([4,5]);
```

几何上，两个向量 v 和 u 的和能够用函数 graphvectadd 显示

```
>graphvectadd(v,u);
```

物理上，这个和表示作用在运动质点上的两个力 v 和 u 的合力. 代数上，两个向量 v 和 u 的和用

```
>'v+u'=evalm(v+u);
```

得到. 向量 $v+u$ 的分量是向量 v 与 u 的分量的和. 两个向量的和仍是 $\mathbb{R}^2$ 里的向量. 因此，

1. **向量的集合在加法下是封闭的.**

如果我们把向量 u 加到向量 v 上将会怎么样？

```
>'u+v'=evalm(u+v);
```

两个向量 $v+u$ 和 $u+v$ 相等吗？

2. **对于任意两个向量 u 与 v，交换律成立：**

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$$

你能说出这个结论在 $\mathbb{R}^n$ 中成立的理由吗？

结合律成立吗？在 $\mathbb{R}^2$ 中选取任意三个向量 v,u 和 w

```
>v:=vector([2,3]);  u:=vector([4,1]);  w:=vector([1,5]);
```

几何上，向量 v 与 u 的和能够用函数 graphvectadd 显示

```
>graphvectadd(v,(u,w));
```

和

```
>graphvectadd((v,u),w);
```

从这图形看出,两个和$(v+u)+w$与$v+(u+w)$是相等的. **代数上,**和$(v+u)+w$与$v+(u+w)$是

```
>'(v+u)+w'=evalm(evalm(v+u)+w);
>'v+(u+w)'=evalm(v+evalm(u+w));
```

这两个向量$(v+u)+w$与$v+(u+w)$是相等的.

3. **结合律成立:**

(v+u)+w=v+(u+w)

你能说出这个结论在E^n中成立的理由吗?

把向量w加到零向量上

```
>z:=vector(2,0);
>'w+z'=evalm(w+z);
```

这告诉我们什么?

4. **零向量是加法的单位元.**

如果你把向量v加到向量$(-v)$上将会怎么样. **几何上,**向量$(-v)$与v的方向相反.

```
>'v+(-v)'=evalm(v+(-1)*v);
```

5. **$(-v)$是向量v的加法逆.**

数量乘法

跟矩阵的情形一样,当我们用一个向量乘一个实数时,这个向量的每一个分量都用这个实数相乘. 如果实数是正数,则得到与给定向量方向相同的向量;如果实数是负数,则得到方向相反的向量.

例 1.3 考虑向量

```
>v:=vector([5,7]);
```

用数$k=3,-3,\frac{1}{2},1$去乘向量v,结果怎样? **几何上,**这能够用graphscalarmulti显示.

```
>graphscalarmulti(3,v);
>graphscalarmulti(-3,v);
>graphscalarmulti(1/2,v);
>graphscalarmulti(1,v);
```

代数上,

```
>'k1*v'=evalm(k1*v);
```

检查分配律是否成立

```
>'k2*v'=evalm(k2*v);
>'k1*v+k2*v'=evalm(k1*v+k2*v);
>'(k1+k2)*v'=evalm((k1+k2)*v);
```

比较k_1v+k_2v与$(k_1+k_2)v$,我们有

6. **对于任意数k_1,k_2和任意向量v,有**

$$(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v.$$

比较下述两个量

```
>'k1 * (v+u)' = evalm(k1 * (v+u));
>'k1 * v+k1 * u' = evalm(k1 * v+k1 * u);
```

7.对于任意数 k_1 与任意向量 v、u,有

$$k_1(v+u)=k_1v+k_1u$$

现在检查结合律是否成立:

```
>'(k1 * k2) * v' = vealm((k1 * k2) * v);
 'k1 * (k2 * v)' = evalm(k1 * (k2 * v));
 'k2 * (k1 * v)' = evalm(k2 * (k1 * v));
```

我们得出结论

8.$(k_1k_v)v=k_1(k_2v)=k_2(k_1v)$

最后

```
>'1 * v' = evalm(1 * v);
```

9.$1*v=v$ **对任意向量** v.

结 论

实数集上的**线性空间**或**向量空间**一定满足关于加法和数量乘法的性质 1-9.

向量空间的其它例子

在一般的线性空间里,向量不总是指具有指定数目的分量的元素.如果我们正在处理的是函数空间,那么向量是函数.这种空间的许多例子在微积分预备或者微积分课程里研究.下面是一些例子.

例 1.4 思考次数小于或等于 n 的所有多项式组成的集合.

两个多项式的和是多项式吗?一个多项式的数量倍是多项式吗?这个集合满足性质 1-9吗?

例 1.5 思考闭区间$[a,b]$上的所有连续函数组成的集合.这是向量空间的一个例子吗?两个连续函数的和是连续函数吗?一个连续函数的数量倍是连续函数吗?

练 习

1.考虑次数小于或等于 3 的所有多项式组成的集合.选取具有一般系数的两个这样的多项式:

```
>p: = x- >a1 * x^3+b1 * x^2+c1 * x+d1;
 q: = x- >a2 * x^3+b2 * x^2+c2 * x+d2;
```

(1)和 $p+q$ 是多项式吗?

(2)数量积 $k*q$ 是多项式吗?

(3)线性空间的 9 条性质中有被违背的吗?

(4)这个集合在通常的多项式加法与数量乘法下是线性空间吗?

2. 考虑所有 3×3 上三角矩阵组成的集合. 选取两个这样的矩阵 A 与 B:

```
>A:=matrix([[a,b,c],[0,f,g],[0,0,h]]);
 B:=matrix([[a1,b1,c1],[0,f1,g1],[0,0,h1]]);
```

(1)两个上三角矩阵的和是上三角矩阵吗?

(2)一个上三角矩阵的数量倍是上三角矩阵吗?

(3)线性空间的 9 条性质有被违背的吗?

(4)这个集合在通常的矩阵加法与数量乘法下是线性空间吗?

3. 对于下列两个集合重复练习第 2 题所提的问题:

(1)所有 3×3 可逆矩阵组成的集合.

(2)所有 3×3 对称矩阵组成的集合.

课 文 3.2

线性组合和张成

在分析某种类型的应用中引起的一个问题是：找出描述基础结构的最小集合．这些应用的例子包括：把一个集合划分成等价类，在图论中和在计算机科学里的数据结构的研究中决定极小生成树，以及在自动机理论中对一个有限状态机决定其极小状态．这种类型的问题促使我们研究下面的问题：

给定一个向量集 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和一个向量 w，我们想检查 w 是否能表示成所给向量的和，以及集合 S 是否为具有这个性质的最小集合．

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

线性组合

例 2.1 向量

```
>w:=vector([-4,-20,27]);
```

能否写成向量 v 和 u 的数量倍的和？

```
>v:=vector([2,4,6]);  u:=vector([-2,-8,7]);
```

即 $w=c_1v+c_2u$ 是否对某个 c_1 和 c_2 成立，为予以证明，我们需要经过两个步骤．

1．赋值 c_1v+c_2u

```
>'c1*v+c2*u'=evalm(c1*v+c2*u);
```

为了使向量 w 等于 c_1v+c_2u，

```
>evalm(c1*v+c2*u)=evalm(w);
```

我们需要检查是否有值 c_1 和 c_2 满足方程组：

```
>eq1:=2*c1-2*c2=-4;
  eq2:=4*c1-8*c2=-20;
  eq3:=6*c1+7*c2=27;
```

2．求解这个非齐次线性方程组．

形成上述方程组的增广矩阵：

```
>AUG:=matrix([[2,-2,-4],[4,-8,-20],[6,7,27]]),
```

对增广矩阵运用高斯(Gauss)消去法，化成阶梯形：

```
>AUG1:=gausselim(AUG);
```

对 AUG1 运用回代法，解这个方程组(如果相容的话)：

```
>[c1,c2]=backsub(AUG1);
```

因为这个非齐次线性方程组有解 $c_1=1$ 和 $c_2=3$，所以向量 w 能表示成向量 v 和 u 的一个组合：

```
>evalm(w)=1*evalm(v)+3*evalm(u);
```

一般地，向量 w 称为向量组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的线性组合，如果我们能找到数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n.$$

把向量 w 表示成一个给定向量组的线性组合，归结为解一个非齐次线性方程组. 即

向量 w 是给定向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的线性组合当且仅当伴随的非齐次线性方程组是相容的.（事实 3.1）

学习过程

让我们利用函数 Lincomb 重复例 1.1，这个函数一步一步地展示把给定的一个向量表示成给定向量组的线性组合的过程. 你希望用一些例子试一试吗？下面就是一些例子.

例 2.2 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的向量

```
>v1:=vector([2,4,6]);      v2=vector([-2,-8,7]);
 w:=vector([-4,-20,27]);
```

w 是 v_1 与 v_2 的线性组合吗？

```
>Lincomb(v1,v2,w);
```

如果 w 是一个线性组合，w 表示成 v_1 和 v_2 的线性组合有多少种方式？在这个例子里，我们看到 w 能被唯一地表示成给定向量的线性组合.

找出另一个向量 w，它是 v_1 和 v_2 的线性组合：

```
>w:=2*evalm(v1)+(-4)*evalm(v2);
```

描述给定向量 v_1 与 v_2 的所有线性组合组成的集合.

例 2.3 考虑向量

```
>v1:=vector([2,4,5]);  v2:=vector([3,6,8]);
 v3:=vector([1,6,3]);  w:=vector([4,6,2]);
```

w 是 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合吗？如果是，w 表示成它们的线性组合有多少种方式？

```
>Lincomb(v1,v2,v3,w);
```

在这个例子里，w 也是唯一地表示成给定向量 v_1,v_2,v_3 的线性组合.

找出另一个向量 w，它是 v_1,v_2,v_3 的线性组合.

```
>w:=5*evalm(v1)+2*evalm(v2)+(-1)*evalm(v3);
```

描述向量 v_1,v_2 和 v_3 的所有线性组合所形成的集合.

例 2.4 考虑向量

```
>v1:=vector([2,4,5]);      v2:=vector([3,6,8]);
 v3:=vector([7,14,18]);   w:=vector([6,12,18]);
```

w 是 v_1,v_2,和 v_3 的线性组合吗？

```
>Lincomb(v1,v2,v3,w);
```

有几处方式将 w 表示成 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合？在这个例子里，向量 w 可以有无穷多种

方式表示成给定向量的线性组合.

找出一个向量,它是向量 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合.

例 2.5　考虑向量

```
>v1:=vector([2,4,5]);     v2:=vector([3,6,8]);
 v3:=vector([7,14,18]);   w:=vector([4,6,2]);
```

w 是 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合吗?

```
>Lincomb(v1,v2,v3,w);
```

向量 w 不能表示成给定向量 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合.

张成集的例子

由给定向量集 $S_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的所有线性组合组成的集合 S 定义如下:

$$S=\{c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n \mid c_1,c_2,\cdots,c_n \text{ 是数量}\}$$

S 称为集合 S_1 的**张成**,记作 $S=\mathrm{span}(S_1)$.

例 2.6　考虑向量

```
>v1:=vector([1,0]);   v2=vector([0,1]);
```

集合 $S=\{c_1v_1+c_2v_2 \mid c_1,c_2 \text{ 是实数}\}=\{(c_1,c_2)\mid c_1,c_2 \text{ 是实数}\}$ 等于空间 $\mathbb{R}^2$. 从而向量 v_1 和 v_2 的 $\mathrm{span}(\{v_1,v_2\})$ 是空间 $\mathbb{R}^2$.

例 2.7　考虑向量

```
>v1:=vector([2,4,5]);     v2:=vector([3,6,8]);
 v3:=vector([7,14,18]);   w:=([a1,a2,a3]);
```

w 是在 $\mathrm{span}(\{v_1,v_2,v_3\})$ 中吗? 即,我们能否找到数 c_1,c_2 和 c_3,使得

```
>evalm(w)=c1*evalm(v1)+c2*evalm(v2)+c3*evalm(v3);
```

构造从上述向量关系导出的线性方程组的增广矩阵.

```
>AUG:=matrix([[2,3,7,a1],[4,6,14,a2],[5,8,18,a3]]);
```

运用 Gauss 消去法

```
>gausslim(AUG);
```

从阶梯形矩阵来看,这个方程组对任意的 a_1,a_2,a_3 都是相容的吗? 等价地,这个方程组对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量都相容吗?

必须在 a_1,a_2 和 a_3 上加上什么条件才能使这个方程组是相容的?

在这个例子中,这个方程组是相容的,如果下式成立

```
>a2-2*a1=0;
```

这个条件蕴含着 $\mathbb{R}^3$ 中并非每一个向量都是所给向量 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合. 因此,向量 v_1,v_2 和 v_3 并不能张成整个 $\mathbb{R}^3$. 它们张成 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集 $S=\{[a_1,a_2,a_3]\mid a_2-2a_1=0\}$.

例 2.8　给定 $\mathbb{R}^3$ 中的向量

```
>v1:=vector([2,4,5])   v2:=vector=([3,6,8]);
 v3:=vector([0,4,1]);  w:=([a1,a2,a3]);
```

w 是在 $\mathrm{span}(\{v_1,v_2,v_3\})$ 中吗? 即,我们能否找到数 c_1,c_2,c_3,使得

```
>evalm(w)=c1*evalm(v1)+c2*evalm(v2)+c3*evalm(v3);
```

构造从这个向量关系导出的线性方程组的增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[2,3,0,a1],[4,6,4,a2],[5,8,1,a3]]);
```

运用 Gauss 消去法

```
>gausslim(AUG);
```

从阶梯形矩阵看,这个方程组是对于 a_1,a_2 和 a_3 的任意选取都相容吗?或者是否在 a_1,a_2 和 a_3 上有条件,在这个条件下此方程组才是相容的?

在本例中,方程组是相容的,它与 a_1,a_2 或 a_3 的选择无关.即$\mathbb{R}^3$的每一个向量 $[a_1,a_2,a_3]$都能表示成 v_1,v_2 和 v_3 的线性组合.因此,向量 v_1,v_2 和 v_3 的确张成整个$\mathbb{R}^3$.

线性张成的一个性质是:

设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是线性空间 V 的一个子集.S 的所有线性组合组成的集合$L(S)$在 V 的加法和数量乘法下是封闭的.(事实 3.2)

练 习

在下列练习中,你可能需要利用自动函数 Lincomb 和 Maple 命令 evalm,evalm(A+B),matrix,vector 和 solve.

1.把向量

```
>w:=vector([8,1,6,7,25]);
```

表示成以下向量的线性组合:

```
>v1:=vector([1,0,2,-3,4]);      v2:=vector([2,3,-4,6,7]);
 v3:=vector([4,-5,6,7,10]);
```

请使用 Lincomb 的交互程式.

2.求向量

```
>w:=vector([a,b,c,d]);
```

使它不在下列向量的张成中:

```
>v1:=vector([1,1,2,3]);   v2:=vector([1,0,-2,-3]);
 v3:=vector([4,3,4,6]);
```

你可以使用 Lincomb 或者按下式方法:(1)把 w 表示成v_1,v_2 和 v_3 的线性组合;(2)取出由该线性组合产生的线性方程组.写出其增广矩阵并且运用合适的算法来确定这个方程组的相容性:从增广矩阵的约简形式来确定一个使这个方程组不相容的关系.写出几个向量 w,它们都不在 v_1,v_2 和 v_3 的张成中.

3.描述下列向量的线性张成:

```
>v1:=vector([1,-1,0]);   v2:=vector([0,1,0]);
```

4.在第 3 题中,如果添加向量 v_3,那么 v_1 和 v_2 的线性张成有改变吗?

```
>v3:=vector([1,2,3]);
```

5.在第 4 题中,如果添加向量 v_4,那么 v_1,v_2 和 v_3 的线性张成有改变吗?

```
>v4:=vector([5,7,9]);
```

6.下列 2×2 矩阵组成的集合$\{A1,A2,A3,A4\}$能张成元素为实数的所有 2×2 矩阵组成的集合吗?

```
>A1:=matrix([[1,-1],[1,1]]);      A2:=matrix([[1,-1],[0,1]]);
 A3:=matrix([[1,-1],[1,0]]);      A4:=matrix([[1,0],[1,1]]);
```

课文 3.3 子空间

给定线性空间的哪些子集在加法与数量乘法下,继承了这个线性空间的同样的性质?

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

在我们进行刻画线性空间的继承它自己的结构的子集以前,让我们评论来自实数集$\mathbb{R}$的一些例子.

例 3.1 考虑子集

```
>S:={-1,0,1};
```

子集 S 在乘法运算下封闭吗? S 在加法运算下封闭吗?

我们会发现由实数组成的向量空间$\mathbb{R}$ 的一些子集并不继承与$\mathbb{R}$ 同样的性质.那么我们如何刻画那些继承与这个空间自身同样性质的子集呢?

例 3.2 考虑$\mathbb{R}^2$的下述子集

```
> 'S1={[X,Y]|2*X+3*Y=1}';
```

选择 S_1 中的两个向量

```
>v:=vector([-4,3]);    u:=vector([-7,5]);
```

计算它们的和

```
> 'v+u'=evalm(v+u);
```

向量 $v+u$ 属于S_1 吗? 为什么?

关于数量乘法怎么样? 设 k 是任一数,则

```
> 'k*v'=evalm(k*v);
```

对于 k 的任何值,向量 $k*v$ 属于子集S_1 吗? 为什么? 子集合 S_1 既在加法运算下不封闭,又在数量乘法运算下不封闭.从而 S_1 不继承与 $\mathbb{R}^2$ 同样的性质.

现在考虑子集 S_2

> 'S2 = {(x,y)|2 * x + 3 * y = 0}'

子集 S_2 在加法运算下封闭吗? 在数量乘法运算下呢?

子集 S_2 在这两种运算下均封闭. 像 $\mathbb{R}^2$ 的这种子集叫做 $\mathbb{R}^2$ 的一个子空间.

让我们从几何的角度观察 S_1 和 S_2 的不同之处:

```
>with(plots):implicitplot({2 * x + 3 * y = 0, 2 * x + 3 * y = 1},
                          x = -5..5, y = -5..5);
```

我们发现 S_2 的图象经过原点而 S_1 的图象不经过. 零向量属于集合 S_2 但不属于集合 S_1.

例 3.3 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的例子

```
> 'S1 = {[x,y,z]|2 * x + 3 * y + z = 0}';
> 'S2 = {[x,y,z]|2 * x + 3 * y + z = 100}';
>implicitplot 3d({2 * x + 3 * y + z = 0, 2 * x + 3 * y + z = 100},
  x = -5..5, y = -5..5, z = 0..100, axes = normal);
```

从图形上,你能说出哪个子集不含零向量吗? 集合中不含零向量蕴含着什么?

S_2 在加法和数量乘法运算下封闭吗? 从 S_2 中选择两个向量并且重复例 3.2 的步骤.

S_1 在加法和数量乘法运算下封闭吗? 从 S_1 中选择两个向量并且重复例 3.2 的步骤.

因此,线性空间 V 的一个非空子集 S 是 V 的一个**子空间**,如果它满足下面两个条件:

- 如果 v_1 和 v_2 属于 S,那么 $v_1 + v_2$ 属于 S;即 S 在加法下封闭.
- 如果 v 属于 S 且 k 为任一数量,那么 $k * v$ 属于 S;即 S 在数量乘法下封闭.

线性空间 V 是它自身的子空间吗?

由零向量组成的集合是任意线性空间的子空间吗?

如果一个子集不含零元素,这个子集能成为子空间吗? (事实 3.1)

$\mathbb{R}^2$ 的所有子空间有哪些? $\mathbb{R}^3$ 呢? 一般地,$\mathbb{R}^n$ 的子空间有哪些?

设 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是线性空间 V 的向量集. 所有线性组合组成的集合,即 span($\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$)是所给向量空间的子空间吗? (事实 3.2)

例 3.4 考虑齐次线性方程组

```
>eq1: = x1 + 3 * x2 + 5 * x3 = 0;   eq2: = 3 * x1 + 2 * x2 + 5 * x3 = 0;
```

这个方程组由矩阵乘法 $A * x = 0$ 定义,其中 A 和 x 为:

```
>A: = matrix([[1,3,5],[3,2,5]]);     x: = matrix([[x1],[x2],[x3]]);
```

它等价于

```
>multiply(A,x) = 0;
```

通过解方程组

```
>solve({eq1,eq2},{x1,x2,x3});
```

我们得到

```
> 'S = {(x1,x2,x3)|x1 = (-5/7) * a, x2 = (-10/7) * a, x3 = a}';
```

S 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗? 几何上,S 代表一条过原点的直线. 集合 S 在加法和数量乘法运算下是封闭的. 因此 S 是一个子空间. 从而齐次线性方程组的解集是子空间,称为矩阵 A 的**零空间**(nullspace),记做 $N(A)$.

非齐次线性方程组的解集是子空间吗?

学习过程

函数 subspace 分步展示了说明一个子集是否是子空间的过程.你希望用一些子集试验一下吗?下面是一些例子.

例 3.5　考虑如下子集 S

```
>S:={[x,y,z],x+y^2+z=0};
```

S 是$\mathbb{R}^3$的子空间吗?用函数 subspace 检验:

```
>subspace(S);
```

有哪些性质被违背?

例 3.6　考虑如下子集 S

```
>S:={[x,y,z],x+y+z=0};
```

S 是 $\mathbb{R}^3$的子空间吗?再利用上述函数

```
>subspace(S);
```

对于你的回答说出理由.

练　习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 subspace 和 lincomb,以及 maple 命令 evalm,add,matrix,vector,gausslim 和 solve.

1.设 $\mathbb{R}^3$的子集 S 如下

```
>S:={[x,y,z],x+2*y-3*z=0};
```

(1)展示集合 S 中的两个具体元素 v_1 和 v_2, v_1+v_2 与 $k*v_1$ 在 S 中吗?

(2)利用函数 subspace 检查 S 是否为子空间.

```
>subspace(   );
```

2.矩阵 A 表示一个齐次线性方程组的增广矩阵:

```
>A:=matrix([[1,-2,4,0],[-1,2,-4,0],[2,-4,8,0]]);
```

(1)化简矩阵 A,并写出该齐次线性方程组的解集 S.

(2)解集 S 是子空间吗?利用函数 subspace 的交互程式.

(3)假设你用下述矩阵代替上面的增广矩阵:

```
>A:=matrix([[1,-2,4,3],[-1,2,-4,-3],[2,-4,8,6]]);
```

(4)化简矩阵 A,并写出该非齐次线性方程组的解集 S.

(5)解集 S 是子空间吗?试解释之.

课文 3.4

线性无关

在我们寻找能张成线性空间 V 的极小集合 S——即在线性空间 V 中的任一向量均可表示成 S 中向量的线性组合，而 S 又是最小的集合之前——我们需要先介绍线性相关的概念.

初始化软件包

```
>with(linalg):(with linspace);
```

线性相关和线性无关集合的例子

例 4.1 考虑两个向量

```
>v:=vector([2,5]);  u:=vector([4,10]);
```

向量 u 是向量 v 的倍数($u=2v$)，这可以表示成 $u+(-2)v=0$. 即存在非零数量 $c_1=-2$和 $c_2=1$ 使得组合 c_1u+c_2v 等于零向量. 向量 v 和 u 称为**相关向量**(dependent vectors).

考虑向量 v 和 u 的线性组合 c_1v+c_2u.

```
>c1*evalm(v)+c2*evalm(u);
```

它等于零向量[0,0]:

```
>c1*evalm(v)+c2*evalm(u)=[0,0];
```

从这个关系，我们得到伴随的齐次线性方程组

```
>eq1:=2*c1+4*c2=0;  eq2:=5*c1+10*c2=0;
```

对于 c_1 和 c_2，解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2});
```

这个方程组有解吗? 它有无穷多个解，$c_1=-2, c_2=1$ 是其中之一. 这蕴含着存在不全为零的数量 c_1 和 c_2，使得

```
>c1*evalm(v)+c2*evalm(u)=[0,0];
```

从几何上看，向量 u 和 v 属于同一条直线，因此称它们为相关向量.

例 4.2 考虑两向量

```
>v:=vector([2,5]);  u:=vector([4,8]);
```

向量 u 不是向量 v 的倍数，能找到非零数量 c_1 和 c_2 使下式成立吗？

```
>c1 * evalm(v) + c2 * evalm(u) = [0,0];
```

从这线性组合导出的齐次方程组为：

```
>eq1: = 2 * c1 + 4 * c2 = 0;   eq2: = 5 * c1 + 8 * c2 = 0;
```

对于 c_1 和 c_2，解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2});
```

这个方程组有解吗？实际上，$c_1=0$ 且 $c_2=0$ 是唯一的解.在这个情形

```
>c1 * evalm(v) + c2 * evalm(u) = [0,0];
```

中，蕴含着 c_1 和 c_2 均为零.

从几何上看，向量 v 和 u 不在同一条直线上.称向量 v 和 u 是**无关**的(independent).

例 4.3 考虑$\mathbb{R}^2$中的三个向量

```
>v1: = vector([2,3]);   v2: = vector([5,7]);
  v3: = vector([9,19]);
```

从例 4.1 和例 4.2 中，我们看到决定向量是相关或无关，可考虑向量方程

```
>c1 * evalm(v1) + c2 * evalm(v2) + c3 * evalm(v3) = [0,0];
```

伴随的齐次方程组是

```
>eq1: = 2 * c1 + 5 * c2 + 9 * c3 = 0;   eq2: = 3 * c1 + 7 * c2 + 19 * c3 = 0
```

对于 c_1,c_2 和 c_3，解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2,c3});
```

这个方程组有无穷多个解.

向量 v_1,v_2 和 v_3 相关还是无关？等价地，我们能否将 v_1,v_2,v_3 中的一个向量写成其余两个的线性组合？实际上一个这样的组合是：

```
>[9,19] = 32 * [2,3] + (-11) * [5,7];
```

即向量 v_1,v_2 和 v_3 是相关的.一般地，

向量空间 V 中的向量组 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 称为线性相关的，如果存在不全为零的数量 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n=0.$$

等价地，其中一个向量是其余向量的线性组合.否则，称该向量组是线性无关的；即由任意零组合

$$c_1v_2+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n=0,$$

可推出

$$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_n=0.$$

决定一个向量组是线性相关还是线性无关可归结为解一个齐次线性方程组.如果这个齐次方程组仅有平凡解，则这个向量组是**线性无关**的；如果该齐次方程组有无穷多个解，则该向量组是**线性相关**的.(事实 3.7 和 3.8)

为了决定一个向量组线性相关还是线性无关：

1.写出它们的线性组合并且令它等于 0.

2.导出伴随的齐次线性方程组.

3. 解这个齐次方程组.

学习过程

让我们利用软件包 linspace 中的函数 lindep 考虑另外几个例子. 该函数分步演示了如何确定一个向量组是线性相关还是无关的过程.

想用任一向量组试一试吗? 下面是一些例子.

例 4.4　下列向量是相关还是无关?

```
>v1:=vector([1,2,3]);  v2:=vector([4,3,1]);
 v3:=vector([5,5,4]);
>lindep(v1,v2,v3);
```

在这个例子中, 这些向量是线性相关的. 一般地,

如果一个向量组 S 是线性相关的, 则 S 中至少有一个向量可以写成其余向量的线性组合. (事实 3.4)

例 4.5　考虑向量

```
>e1:=vector([1,0,0,0,0]);  e2:=vector([0,1,0,0,0]);
 e3:=vector([0,0,1,0,0]);  e4:=vector([0,0,0,1,0]);
 e5:=vector([0,0,0,0,1]);
```

你能猜出向量组是线性相关还是无关吗? 在这个例中向量组 $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ 是线性无关的. 一般地, 向量组 $\{e_i, i=1,2,3,\cdots,n\}$, 其中 e_i 的第 i 个位置上是 1 而其余位置上是 0, 是线性无关向量组的一个例子.

例 4.6　证明下述集合是线性相关的:

```
>u1:=vector([0,0,0,0]);  u2:=vector([2,6,7,9])
 u3:=vector([5,2,3,8]);  u4:=vector([1,4,3,5])
```

请利用 lindep 的无步骤程式

```
>lindep(u1,u2,u3,u4);
```

如果一个向量组 S 包含零向量, 则 S 必线性相关. (事实 3.5)

若 S 是线性无关的向量组, $S1$ 是 S 的子集, 那么 $S1$ 是相关还是无关?

例 4.7　设 S 是 $\mathbb{R}^4$ 的线性无关的子集, 它由下述向量组成

```
>w1:=vector([1,4,2,3])  w2:=vector([-1,2,0,2]);
 w3:=vector([0,0,1,1])  w4:=vector([0,0,0,1]);
```

选择 S 的子集 $S1$

```
>S1:={w2,w3};
```

$S1$ 是 S 的线性相关还是无关子集?

```
>lindep(w2,w3);
```

一般地,

若 S 是线性无关的集合, 则 S 的任意子集 $S1$ 也是线性无关的. (事实 3.6)

若 S 是线性相关的集合，S 的每一个子集也线性相关吗？我们能取出 S 的一个线性无关的子集 S_1 吗？

例 4.8 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的线性相关的子集，它由下述向量组成：

```
>v1:=vector([1,3,5]);   v2:=vector([4,2,1]);
 v3:=vector([0,1,1]);   v4:=vector([6,8,11]);
```

设 S1 是 S 的子集

```
>S1:={v1,v3,v4};
```

S1 是线性相关还是无关的？

```
>lindep(v1,v3,v4)
```

集合 S_1 是线性无关的．而下面的集合呢？

```
>S1:={v1,v2,v4};
```

这个集合是线性相关还是无关？

```
>lindep(v1,v2,v4);
```

集合 S_1 是线性相关的．

若 S 是线性相关的集合，则 S 的每个子集并非都线性相关．

例 4.9 考虑函数的集合

```
>f:=x->2*exp(x);   g:=x->x*exp(x);
 h:=x->(x^2)*exp(x);
```

函数 f,g,h 是线性无关的吗？考虑下述关系

```
>w:=c1*f(x)+c2*g(x)+c3*h(x)=0;
```

因为这个关系式对任意的 x 成立，在 w 中分别将 $x=1,x=2$ 和 $x=0$ 代入，得到求解 c_1,c_2,c_3 的三个方程

```
>eq1:=subs(x=1,w);   eq2:=subs(x=2,w);   eq3:=subs(x=0,w);
```

解这个齐次线性方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{c1,c2,c3});
```

函数 f,g 和 h 是线性相关还是无关？

练　习

在下列练习中，你可能需要使用自动函数 lindep，lincomb 和 Subspace，以及 Maple 命令 evalm，add，matrix，vector，gausslim，solve 和 Wronskian．

1．请使用 lindep 的交互程式检查下列向量的线性相关性：

```
>v1=vector([-1,2,3,4]);     v2:=vector([-1,3,2,5]);
 v3=vector([-4,9,11,17]);   v4:=vector([-1,5,3,0]);
```

2．考虑两个向量：

```
>v1:=vector([-1,2,-3,4,5]);   v2:=vector([1,-1,7,3,4]);
```

(1)构造一个向量 w，使它不是 v_1 和 v_2 的线性组合．[**提示：**设 w=vector([a,b,c,d,e])，假设 w 是 v_1 和 v_2 的线性组合，得到一个或一组关系，使你可回答该问题．]

(2)所给向量与第(1)小题中构造的向量一起是线性无关的吗？

(3)你能说出一种方法把所给的线性无关向量集扩充成较大的线性无关向量集吗?

3.考虑函数

```
>f1:x->1;  f2:=x->x;  f3:=x->x^2;
```

(1)在区间(-1,1)上,上述函数集是线性相关还是无关的?

(2)构造 3×3 矩阵 A.其第一行为函数 f_1,f_2 和 f_3,第二和第三行分别为 f_1,f_2 和 f_3 的一阶和二阶导数,计算该矩阵的行列式,此行列式称为函数 f_1,f_2 和 f_3 的**朗斯基(Wronskian)行列式**(打印吗? Wronskian 在 Maple 当前状态).

(3)考虑函数

```
>g1=x->1;  g2:=x->x;  g3:=x->1+x;
```

函数 g_1,g_2 和 g_3 是线性相关还是无关的?

(4)求出函数 g_1,g_2 和 g_3 的朗斯基行列式.

(5)从(1)-(4)中,你能否建立线性相关与无关和朗斯基行列式的关系?

4.函数 $1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n$ 是线性无关的吗?

课 文 3.5

基和维数

现在我们准备决定一个线性空间的极小生成集(minimal spanning set).

初始化软件包

```
>with:(linalg):with(linspace)
```

基的例子

例 5.1 考虑两个线性无关的向量

```
>e1:=vector([1,0]);  e2:=vector([0,1]);
```

$\mathbb{R}^2$ 中每一个向量都是向量 e_1 和 e_2 的线性组合吗?

设 w 是$\mathbb{R}^2$中任一向量

```
>w:=vector([x,y]);
```

若 $w=[x,y]$是 e_1 和 e_2 的一个线性组合

```
>w=c1*evalm(e1)+c2*evalm(e2);
```

则 $c_1=x$ 且$c_2=y$,从而 w 是

```
>evalm(w)=x*evalm(e1)+y*evalm(e2);
```

因此,$\mathbb{R}^2$ 中每一个向量 w 都是线性无关向量 e_1 和 e_2 的一个线性组合. 于是集合 $\{e_1,e_2\}$是线性无关的,它张成$\mathbb{R}^2$.

如果我们再添加一向量 u 构成向量集$\{e_1,e_2,u\}$,又将如何呢?

例 5.2 考虑下列向量

```
>e1:=vector([1,0]);  e2:=vector([0,1]);  u:=vector([2,5]);
```

集合$\{e_1,e_2,u\}$张成 $\mathbb{R}^2$吗? 设 w 是 $\mathbb{R}^2$中任一向量

```
>w:=vector([x,y]);
```

如果 w 是向量e_1,e_2 和 u 的一个线性组合,

```
>evalm(w)=c1*evalm(e1)+c2*evalm(e2)+c3*evalm(u);
```

由此产生方程组

```
>eq1:=c1+2*c3=x;  eq2:=c2+5*c3=y;
```

解这个方程组,我们得到

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2,c3});
```

因为这个方程组是相容的,所以向量 e_1,e_2 和 u 的确张成$\mathbb{R}^2$.通过选择自由变量 $c3=1$,向量 w 可以写成

```
>w=(x-2)*evalm(e1)+(y-5)evalm(e2)+evalm(u);
```

向量 e_1,e_2 和 u 是线性无关的吗? 使用 lindep 的无步骤程式来检查:

```
>lindep(e1,e2,u);
```

我们得到结论向量 e_1,e_2,u 是线性相关的,但它们张成$\mathbb{R}^2$.

在例 5.1 和 5.2 中,集合 $S_1=\{e_1,e_2\}$,$S_2=\{e_1,e_2,u\}$均张成$\mathbb{R}^2$.但是 S_1 是线性无关的集合而 S_2 是线性相关的.

用$\{e_1\}$或$\{e_2\}$能张成 $\mathbb{R}^2$吗? 似乎集合$\{e_1,e_2\}$是能张成 $\mathbb{R}^2$的极小线性无关集合.我们称这样的集合为 $\mathbb{R}^2$ 的一个**基**,集合$\{e_1,e_2\}$称为 $\mathbb{R}^2$ 的**标准基**(Standard basis).

集合$\{e_1,e_2\}$是唯一能张成 $\mathbb{R}^2$ 的线性无关集吗?

例 5.3 考虑向量

```
>v:=vector([2,7]);  u:=vector([5,11]);
```

设 w 是 $\mathbb{R}^2$中任一向量

```
>w:=vector([x,y]);
```

如果 w 是 v 和 u 的一个线性组合

```
>evalm(w)=c1*evalm(v)+c2*evalm(u)
```

将产生方程组

```
>eq1:=2*c1+5*c2=x,  eq2:=7*c1+11*c2=y
```

对于 c_1,c_2 解这个方程组,我们得到

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2});
```

因为这个方程组是相容的,所以向量 v 和 u 确实张成$\mathbb{R}^2$.

使用 lindep 的无步骤程式检查 v 和 u 是否线性无关:

```
>lindep(v,u);
```

$\mathbb{R}^2$中任意两个线性无关的向量,均可作为张成 $\mathbb{R}^2$的极小线性无关集.

$\mathbb{R}^3$中类似的情形成立吗?

例 5.4 考虑线性无关向量组

```
>e1:=vector([1,0,0]);  e2:=vetor([0,1,0]);
  e3:=vector([0,0,1]);
```

设 w 是$\mathbb{R}^3$中任一向量

```
>w:=vector([x,y,z]);
```

如果 w 是e_1,e_2 和 e_3 的一个线性组合

```
>evalm(w)=c1*evalm(e1)+c2*evalm(e2)+c3*evalm(e3);
```

则 $c_1=x,c_2=y$ 且$c_3=z$,因此

```
>w=x*e1+y*e2+z*e3;
```

从而集合$\{e_1,e_2,e_3\}$是张成$\mathbb{R}^3$的线性无关集.集合$\{e_1,e_2,e_3\}$称为$\mathbb{R}^3$的标准基.

如果我们添加一个向量到集合$\{e_1,e_2,e_3\}$中,又将如何?

例 5.5 考虑向量组

```
>e1:=vector([1,0,0]);  e2:=vector([0,1,0]);
 e3:=vector([0,0,1]);  u:=vector([2,5,6]);
```

设 w 是 $\mathbb{R}^3$中任一向量

```
>w:=vector([x,y,z]);
```

如果 w 是e_1,e_2,e_3 和 u 的线性组合:

```
>evalom(w)=c1*evalm*(e1)+c2evalm(e2)+c3evalm(e3)+c4*evalm(u);
```

则我们得到方程组

```
>eq1:=c1+2*c4=x;  eq2:=c2+5*c4=y;  eq3:=c3+6*c4=z;
```

对于 c_1,c_2 和 c_3 解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{c1,c2,c3,c4});
```

我们看到向量 e_1,e_2,e_3 和 u 确实张成 $\mathbb{R}^3$.通过选取 $c_4=1$,得

```
>evalm(w)=(x-2)evalm(e1)+(y-5)*evalm(e2)
          +(z-6)*evalm(e3)+evalm(u);
```

集合$\{e_1,e_2,e_3,u\}$是线性无关的吗?利用 lindep 的无步骤程式

```
>lindep(e1,e2,e3,u);
```

在例 5.4 和 5.5 中,集合 $S_1=\{e_1,e_2,e_3\}$和 $S_2=\{e_1,e_2,e_3,u\}$均张成 $\mathbb{R}^3$. 但 S_1 是线性无关的而 S_2 是线性相关的.

两个或更少的向量能张成 $\mathbb{R}^3$吗?似乎集合$\{e_1,e_2,e_3\}$是张成$\mathbb{R}^3$的极小线性无关集.我们称这样的集合为 $\mathbb{R}^3$的一个基(basis).

同样地,它是张成 $\mathbb{R}^3$ 的仅有的极小线性无关集吗?

例 5.6 考虑向量

```
>v1:=vector([0,1,1]);  v2:=vector([1,1,2]);
 v3:=vector([1,0,2]);
```

设 w 是 $\mathbb{R}^3$中任一向量

```
>w:=vector([x,y,z]);
```

检查 w 是否是v_1,v_2 和 v_3 的一个线性组合:

```
>evalm(w)=c1*evalm(v1)+c2*evalm(v2)+c3*evalm(v3);
```

这产生方程组

```
>eq1:=c2+c3=x;  eq2:=c1+c2=y;  eq3:=c1+2*c2+2*c3=z;
```

对于 c_1,c_2 和 c_3 解这个方程组

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{c1,c2,c3});
```

我们看到向量 v_1,v_2 和 v_3 确实张成$\mathbb{R}^3$,并且向量 w 能写成

```
>w=(-2*x+z)*evalm(v1)+(2*x+y-z)*evalm(v2)
     +(-x-y+z)*evalm(v3);
```

集合$\{v_1,v_2,v_3\}$是线性无关的吗?利用 lindep 的无步骤程式检查

```
>lindep(v1,v2,v3);
```

$\mathbb{R}^3$中任意三个线性无关向量可作为张成 $\mathbb{R}^3$的极小线性无关集.

下面是极小生成集的定义:

定义

线性空间 V 的一个基 B 是 V 的一个非空子集,它满足下述条件:

- B 是一个线性无关的集合.
- B 张成线性空间 V.

线性空间 V 的维数(dimension)记成 $\dim(V)$,它是基中元素的数目.若这个数目是有限的,则称 V 为有限维空间;否则,称这个空间为无限维空间.

从例 5.1-5.4,我们得出结论:线性空间 V 的极小生成集不唯一.一个线性空间有许多不同的极小生成集,但是每个极小生成集的元素数目是相同的.

学习过程

让我们借助函数 basis 学习关于基的更多的内容.你可以自选向量集,并检查它们是否为基.如果不是基,检查两条性质中哪一条不满足.下面是一些例子.

例 5.7 下列向量形成 $\mathbb{R}^4$的一个基吗? 如果不是,那么基的哪条性质被违背?

```
>u1:=vector([3,4,2,7]);  u2:=vector([5,2,1,0]);
 u3:=vector([1,3,5,6]);  u4:=vector([9,9,8,13])
```

利用 basis 的论证程式证明它

```
>basis(u1,u2,u3,u4);
```

这个例子表明其中一个向量是其余三个向量的线性组合,因此所给集合不是 $\mathbb{R}^4$的一个基.然而所给集合的一个子集是 $\mathbb{R}^4$的一个子空间的基.这些向量张成的空间的维数是多少?

例 5.8 下列向量形成 $\mathbb{R}^3$的一个基吗? 如果不是,基的哪条性质被违背?

```
>u1:=vector([3,4,2]);  u2:=vector([5,2,1]);
 u3:=vector([1,3,5]);  u4:=vector([9,9,8])
>basis(u1,u2,u3,u4);
```

这个例子表明其中一个向量是其余三个向量的三个向量的线性组合,因此所给集合不是$\mathbb{R}^3$的一个基.然而所给集合的一个子集是 $\mathbb{R}^3$的一个基.这些向量张成的空间维数是多少?

例 5.9 下列向量形成 $\mathbb{R}^3$的一个基吗? 如果不是,基的哪条性质被违背?

```
>u1:=vector([3,4,2]);  u2:=vector([5,2,1]);
 u3:=vector([1,3,5]);
>basis(u1,u2,u3);
```

这些向量张成的空间的维数是多少? 其中的两个向量能形成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基吗?

```
>u1:=vector([3,4,2]);  u2:=vector([5,2,1]);
>basis(u1,u2);
```

在 n 维线性空间 V 中,张成 V 需要多少个线性无关的向量? V 的一个基所含向量数目会大于 n 吗? 会小于 n 吗?

$\mathbb{R}^n$中任意多于 n 个的向量组成的集合都是线性相关的，从而它不是$\mathbb{R}^n$的基.（事实 3.9）

若向量空间 V 的维数为 n，则张成 V 需要 n 个线性无关的向量.（事实 3.10 和 3.11）

线性空间的基不唯一，但所有的基都含有相同数目的元素.（事实 3.12）

有多少种方式将向量 w 表示成线性空间的一个基的线性组合?

例 5.10　选取 $\mathbb{R}^3$的一个基

```
>v1:=vector([1,3,5]);  v2:=vector([-6,4,1]);
 v3:=vector([0,1,1]);
```

以及向量 w

```
>w:=vector([11,-5, 23]);
```

我们把 w 表示成基的线性组合

```
>lincomb(v1,v2,v3,w);
```

如果 B 是线性空间 V 的一个基，那么 V 中任意一个向量 W 均可唯一地表成基 B 的线性组合.（事实 3.13）

练　习

在下列练习中，你可能需要使用自动函数 basis，lindep，lincomb 和 subspace，以及 Maple 命令 evalm，add，matrix，vector，gausslim，rref，solve 和 Wronskian.

1. 考虑向量

```
>v1:=vector([2,-3,4,5]);  v2:=vector([0,1,2,3]);
 v3:=vector([3,0,1,2]);   v4:=vector([4,3,2,1]);
```

（1）构造以所给向量为行的矩阵 A，运用 rref 和 guasselim 来证明这个向量组是一个基.

（2）通过利用 basis 的交互程式证明上述向量组是一个基.

（3）将向量 w 表示成这个基的线性组合

```
>w:=vector([12,-23,27,45]);
```

有几种表示方法?

2. 考虑向量

```
>v1:=vector([1,1,0]);  v2:=vector([0,0,1]);
```

（1）集合$\{v_1,v_2\}$是 $\mathbb{R}^3$的一个基吗?

（2）若不是，将$\{v_1,v_2\}$扩充成 $\mathbb{R}^3$的一个基.

（3）这种扩充是唯一的吗? 如果不是，写出包含 v_1 和 v_2 的三个向量组成的另一个集合，它是 $\mathbb{R}^3$的一个基.

3. 求 $\mathbb{R}^4$的子空间的一个基，该子空间由以下向量张成

```
>v1:=vector([1,1,1,1]);  v2:=vector([1,2,1,2]);
 v3:=vector([0,1,2,0]);  v4:=vector([1,3,1,3]);
```

4. 考虑向量

```
>v1:=vector([3,k,-1,1]);  v2:=vector([-1,2,k,1]);
 v3:=vector([k,4,1,2]);
```

(1)确定 k 的值,使上述向量张成一个 2 维空间 V.

(2)求 V 的一个基.

5. 考虑矩阵

```
>A1:=matrix([[1,0],[0,0]]);  A2:=matrix([[0,1],[0,0]]);
 A3:=matirx([[0,0],[1,0]]);  A4:=matrix([[0,0],[0,1]]);
```

(1)上述矩阵形成所有 2×2 矩阵空间的一个基吗?

(2)所有 2×2 矩阵组成的空间的维数是多少?

(3)对于 3×3 矩阵和 4×4 矩阵,回答(1)与(2),然后对所有 $n\times n$ 矩阵组成的空间叙述结论.

课文 3.6 行空间和列空间

从一个线性方程组的增广矩阵的阶梯形或简化阶梯形矩阵,可以看出这个方程组是相容的还是不相容的.迄今为止我们已经汇集了涉及线性方程组的相容性的下列事实.

齐次线性方程组(HS)$Ax=0$ 总是相容的.而且,

1. 含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有唯一解(平凡解).
   - 当且仅当 A 与单位矩阵行等价.
   - 当且仅当矩阵 A 可逆.
   - 当且仅当 $\det(A)$不等于零.
2. 含有 n 个方程的 m 元齐次线性方程组($n<m$)总有无穷多个解.
3. 含有 n 个方程的 m 元齐次线性方程组($n>m$)有平凡解或有无穷多个解.

非齐次线性方程组(NHS)$Ax=b$ 不总是相容的.

1. 含有 n 个方程的 n 元方程组有唯一解
   - 当且仅当 A 与单位矩阵行等价.
   - 当且仅当矩阵 A 可逆.
   - 当且仅当 $\det(A)$不为零.
2. 含有 n 个方程的 m 元方程组($n<m$ 或 $n>m$)可能相容,也可能不相容.

研究矩阵的**行空间**和**列空间**的理由是要回答非齐次线性方程组(NHS)的相容性问题.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

行空间和列空间的例子

$n\times m$ 矩阵A 的**行空间**是由 A 的行向量张成的空间.因为向量组的张成是一个子空间,所以 $n\times m$ 矩阵A 的行空间是 $\mathbb{R}^m$的一个子空间(事实 3.14),我们把 A 的阶梯形或简化行阶梯形中非零行的数目称为A 的**行秩**,记作 $\operatorname{rank}(A)$.

$n\times m$ 矩阵A 的**列空间**是由 A 的列向量张成的空间.因为向量组的张成是一个子空间,所以 $n\times m$ 矩阵A 的列空间是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间(事实 3.14).我们把 A 的阶梯形或简化行阶梯形中非零列的数目称为A 的**列秩**,也记作 $\operatorname{rank}(A)$.

例 6.1 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3],[6,-3,-8],[8,1,-2]]);
```

用高斯消去法求 A 的行阶梯形

```
>B:=gausselim(A);
```

在这个例子里,因为简化矩阵的非零行数目为 2,所以 A 的行空间是 2 维的,或 $\text{rank}(A)=2$. 行空间的一个基由简化矩阵 B 的非零行组成:

```
>v1:=row(B,1);   v2:=row(B,2);
```

例 6.2 决定下述矩阵 A 的秩和行空间的一个基

```
>A:=matrix([[1,8,3,5],[6,-3,7,11],[8,1,-2,10],[14,-2,5,21]]);
```

用高斯消去法求 A 的阶梯形

```
>B:=gausselim(A);
```

行空间的维数是 3,即 $\text{rank}(A)=3$,并且行空间的一个基是

```
>v1:=row(B,1);   v2=row(B,2);   v3:=row(B,3);
```

例 6.3 决定矩阵 A 的列秩和列空间的一个基

```
>A:=matrix([[1,8,3,5],[6,-3,7,11],[8,1,-2,10],[14,-2,5,21]]);
```

取 A 的转置

```
>B:=transpose(A);
```

对 B 用高斯消去法

```
>B1:=gausselim(B);
```

转置所得结果,我们得到

```
>A1:=transpose(B1);
```

矩阵 A_1 蕴含 A 的列空间的维数为 $3(\text{rank}(A)=3)$,并且它的一个基由简化矩阵 A_1 的三个非零列向量组成.

矩阵 A 的行空间维数等于列空间维数,并且这个公共的数目是 $\text{rank}(A)$.(事实 3.16)

例 6.4 决定矩阵 A 的秩和行空间的一个基.

```
>A:=matrix([[1,8,3,4,12],[6,-3,7,12,15],[-8,3,-2,10,18],
            [-7,11,1,14,31]]);
```

用 gausselim 求 A 的行阶梯形

```
>B:=gausselim(A);
```

从这我们得出行空间的维数为 4,即 $\text{rank}(A)=4$,并且行空间的一个基是

```
>v1:=row(B,1);   v2:=row(B,2);   v3:=row(B,3);   v4:=row(B,4);
```

如果 A 是一个线性方程组的增广矩阵,那么这个方程组是相容的吗? 从矩阵 B 的形式可以看出这个方程组不是相容的.让我们把这与增广矩阵和系数矩阵的秩联系起来.系数矩阵的秩是 3 而增广矩阵的秩是 4.

若将例 6.4 中的矩阵 A 略微改动,用 30 取代其(4,5)元,情况又将如何呢?

例 6.5 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,8,3,4,12],[6,-3,7,12,15],[-8,3,-2,10,18],
            [-7,11,1,14,30]]);
```

用高斯消去法求 A 的阶梯形

```
>B:=gausselim(A);
```

我们得出行空间的维数是 3，即 rank(A)=3，并且行空间的一个基是

```
>v1:=row(B,1);  v2:=row(B,2);  v3:=row(B,3);
```

如果 A 是一个线性方程组的增广矩阵，这个方程组是相容的吗？

矩阵 B 的形式指出该方程组是相容的. 把这和增广矩阵与系数矩阵的秩联系起来. 系数矩阵的秩与增广矩阵的秩都是 3.

例 6.6 设 AUG 是含 4 个方程的 4 元非齐次线性方程组(NHS)的增广矩阵：

```
>AUG:=matrix([[1,-4,2,6,11],[4,5,-3,-7,21],[8,2,-5,6,31],
              [3,2,1,7,15,]]);
```

设 A 为伴随的系数矩阵

```
>A:=matrix([[1,-4,2,6],[4,5,-3,-7],[8,2,-5,6],[3,2,1,7]]);
```

计算并比较 AUG 与 A 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(AUG);
>B1:=rref(A);
```

比较简化矩阵 $B1$ 和 $A1$ 的非零行数目. 这些数目相同吗？矩阵 $B1$ 和 $A1$ 有同样数目的非零行. 从简化矩阵 $A1$ 中，你能看出与 AUG 伴随的线性方程组是相容的吗？这个方程组是相容的并且有唯一解.

例 6.7 现在考虑增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,-4,2,6,11],[4,5,-3,-7,21],[8,2,-5,6,31],
              [12,7,-8,-1,52]]);
```

和它的系数矩阵

```
>A:=matrix([[1,-4,2,6],[4,5,-3,-7],[8,2,-5,6],[12,7,-8,-1]]);
```

让我们计算并比较 AUG 和 A 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(AUG);
>A2:=rref(A);
```

比较简化矩阵 B_1 和 A_1 的非零行的数目，它们相同吗？矩阵 B_1 和矩阵 A_1 具有同样多的非零行.

从简化矩阵 A_1 中，你能看出与矩阵 AUG 伴随的线性方程组是相容的吗？这个方程组是相容的并且有无穷多个解.

例 6.8 现在考虑增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,-4,2,6,11],[4,5,-3,-7,21],[8,2,-5,6,31],
              [12,7,-8,-1,12]]);
```

以及系数矩阵

```
>A:=matrix([[1,-4,2,6],[4,5,-3,-7],[8,2,-5,6],[12,7,-8,-1]]);
```

计算并比较 AUG 和 A 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(AUG);
>B1:=rref(A);
```

比较简化矩阵 B_1 和 A_1 的非零行的数目，它们相同吗？在这情形，二者不同.

从简化矩阵 A_1 中，你能看出与矩阵 AUG 伴随的线性方程组是相容的吗？这个方程组是不相容的.

让我们来分析方程个数与未知量个数不相等的情形.

例 6.9 考虑方程组,它的增广矩阵和系数矩阵分别为:

```
>AUG:=matrix([[0,-4,2,8,11],[4,9,-3,-11,21],[3,2,-5,7,31]]);
>A:=matrix([[0,-4,2,8],[4,9,-3,-11],[3,2,-5,7]]);
```

像例 6.5 那样,看一下 AUG 和 A 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(AUG);
>B1:=rref(A);
```

简化矩阵 A_1 蕴含看方程组的哪些信息?该方程组有无穷多个解.矩阵 B_1 和 A_1 的非零行数目相同吗?

系数矩阵 A 与增广矩阵 AUG 的简化阶梯形具有相同的非零行数目.

考虑矩阵

```
>AUG:=matrix([[0,-4,2,8,11],[4,9,-3,-11,21],[4,5,-1,-3,21]]);
>A:=matrix([[0,-4,2,8],[4,9,-3,-11],[4,5,-1,-3]]);
```

看一下 AUG 和 A 的简化阶梯形

```
>A1:=rref(AUG)
>B1:=rref(A);
```

简化矩阵 A_1 蕴含着方程组的哪些信息?该方程组无解.

矩阵 B_1 和 A_1 具有相同的非零行数目吗?二者不等.

上面这些例子表明:系数矩阵与增广矩阵的线性无关的行数与该方程组的可解性之间存在着内在的联系.

总结

齐次线性方程组 $Ax=0$ 必有解.进一步

1. 含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有唯一(零)解:
   - 当且仅当 A 与单位矩阵行等价.
   - 当且仅当矩阵 A 可逆.
   - 当且仅当 $\det(A)$不为零.
   - 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.
   - 当且仅当 A 有 n 行(列)线性无关.
2. 含有 n 个方程的 m 元线性方程组($n<m$)总有无穷多个解.
3. 含有 n 个方程的 m 元线性方程组($n>m$)有唯一解或有无穷多个解依赖于$\operatorname{rank}(A)$.若 $\operatorname{rank}(A)=m$,则方程组有唯一解;若 $\operatorname{rank}(A)<m$,则方程组有无穷多个解.

非齐次线性方程组 $Ax=b$.

1. 含有 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解:
   - 当且仅当 A 与单位矩阵行等价.
   - 当且仅当矩阵 A 可逆.
   - 当且仅当 $\det(A)$不为零.
   - 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.
   - 当且仅当 A 有 n 行(列)线性无关.
2. n 个方程的 m 元线性方程组($n<m$ 或 $n>m$)是相容的,如果增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩.该方程组是不相容的,如果增广矩阵的秩不等于系数矩阵的秩.

练 习

在以下练习中,你可能需要利用自动函数 basis,lindep,lincomb,和 subspace.

1.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3,4,5],[6,7,8,9,10],[11,12,13,14,1]]);
```

(1)求矩阵 A 的阶梯形.

(2)行空间的维数是多少? 给出行空间的一个基.利用 Maple 命令

```
>rowspace(A);
```

将其输出并与你的结果作比较.

(3)求 A 的转置的阶梯形.

(4)列空间的维数是多少? 给出列空间的一组基.利用 Maple 命令

```
>colspale(A);
```

将其输出并与你的结果作比较.

(5)以 A 为增广矩阵的线性方程组有解吗? 若有解,请写出解集合.

(6)仅改动矩阵 A 的一个元素,使所得方程组有解.

2.求 k 的值,使得 $\mathrm{rank}(A)=2$,其中 A 是矩阵

```
>A:=matrix([[3,1,k],[k,-2,3],[2,k,2]]);
```

指导实验 3.1 线性空间的基本性质

目　的

本实验的目的是巩固有限维线性空间的一些基本概念,着重强调线性子空间.

自动 Linalg 函数

在本实验中,你将利用交互自动函数 subspace. 为了得到任一函数的帮助,在 Maple 的提示符>上键入? 函数名;例如,>? lindep;

指　导

1. 为执行一个命令,通过鼠标或键盘将光标移至该行并且按 enter 键.
2. 运行一个函数时,若需要,应创建 Maple 输入区;否则输出不能在所需位置显示.
3. 执行以下命令以便装载软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

作业 1

本作业是学习线性空间的一些基本性质. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的 2 个向量

```
>v1:=vector([a1,b1]);   v2:=vector([a2,b2]);
```

活动 1

向量 v_1、v_2 之和 w 在 $\mathbb{R}^2$ 中吗? 利用 v_1 和 v_2,如何得到向量 w 的分量?

活动 2

对任意的数量 k,计算向量 kv_1. 向量 kv_1 在 $\mathbb{R}^2$ 中吗?

活动 3

对于活动 1 和活动 2 的 $\mathbb{R}^2$ 中的结论, $\mathbb{R}^3$ 同样具有吗? 描述 $\mathbb{R}^n$ 中的结论.

作业 2

作业 1 表明 $\mathbb{R}^n$在加法和数量乘法运算下封闭，$\mathbb{R}^n$的每一个子集都具有这些性质吗？

活动 1

考虑 $\mathbb{R}^2$的两个子集

>S1:={[x,y],x^2+y=0}; S2:={[x,y],x+y=1}

(1)零向量在 S_2 中吗？S_2 是 $\mathbb{R}^2$的子空间吗？

(2)零向量在 S_1 中吗？S_1 是 $\mathbb{R}^2$的子空间吗？

(3)利用自动函数 subspace 确认你对(2)的答案.

(4)修改 S_2 的定义使其成为 $\mathbb{R}^2$的子空间.利用 subspace 的交互程式证明你的断言.

活动 2

(1)下列哪个集合是$\mathbb{R}^3$的子空间？

(i)$S_3=\{[x_1,x_2,x_3]|x_1-x_2+x_3=0\}$;

(ii)$S_4=\{[x_1,x_2,x_3]|x_1-x_2+x_3=-5\}$.

(2)零向量在 S_4 中吗？S_4 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗？为什么？

(3)零向量属于 S_3 吗？

(4)你能直接看出 S_3 是子空间吗？

(5)利用函数 subspace 检查 S_3 是否为子空间.一个线性空间的子集需具备怎样的性质才能成为子空间？

作业 3

本作业是研究线性子空间与齐次线性方程组的解集之间的关系.考虑齐次线性方程组：

>eq1:=x1+x2+3*x3=0; eq2:=2*x1-7*x2+x3=0;

活动 1

写出该方程组的增广矩阵 AUG.

活动 2

用 Gauss 消元法把矩阵 AUG 化简成它的行阶梯形 AUG1.

活动 3

从 AUG1 中，写出该方程组的解集 W.

活动 4

W 是子空间吗？证明你的结论.

活动 5

描述集合 S_1 和 S_2 的交 S，其中

$S1=\{[x1,x2,x3]|x_1+x_2+3x_3=0\}$, $S2=\{[x1,x2,x3]|2x_1-7x_2+x_3=0\}$

S 和 W 有何关系？两个子空间的交仍是子空间吗？

活动 6

描述子空间 S_1 和 S_2 的并集 U,在 U 中任选两向量 e_1,e_2,它们的和在 U 中吗? U 是子空间吗?

额外实验题

对以下方程组重复作业 3 的活动 1 - 6.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x1 - x2 + x3 - x4 = 0$$

(1)子空间的交仍是子空间吗?

(2)子空间的并仍是子空间吗?

(3)子空间之并不一定为子空间.调查什么条件下子空间之并仍为子空间.(提示:考虑 S_1 是 S_2 的子集或 S_2 是 S_1 的子集.)

指导实验 3.2

线性组合与线性无关

目　的

本实验旨在巩固线性组合、线性相关的基本概念及其与矩阵、线性方程组之间的联系.

自动 Linalg 函数

本实验中,请利用交互自动函数 lincomb,lindep,basis 和 subspace.为了得到一个函数的帮助,在 Maple 的提示符>? 后键入函数名;例如,>? lindep;

指　导

1. 为执行一个命令,通过鼠标或键盘将光标移至该行并按 enter 键.
2. 运行一个函数时,若需要,应建立 Maple 输入区;否则输出不能在所需位置显示.
3. 执行以下命令以便装载软件包.

```
>with(linalg):with(linspace);
```

作业 1

本作业的目的是加深你对线性组合概念的理解.考虑向量集:

```
>v1:=vector([1,2,3,4]);   v2:=vector([4,2,1,5]);
 v3:=vector([3,5,1,7]);   v4:=vector([2,1,4,0]);
 w:=vector([11,9,3,17]);
```

活动 1

w 是向量 v_1,v_2,v_3 和 v_4 的线性组合吗? 即

```
>w:=c1*v1+c2*v2+c3*v3+c4*v4;
```

为了 w 成为 v_1,v_2,v_3,v_4 的线性组合,将导出怎样的线性方程组? 写出该方程组.该方程组是相容的吗? 证明你的结论.若有解,解出 c_1,c_2,c_3 和 c_4.

你得到什么结论? w 是线性组合吗? 写出该线性组合,利用函数 lincomb 的交互程式解答活动 1.

```
>lincomb(v1,v2,v3,v4,w);
```

活动 2

需给向量 w 的分量加上何种条件：

```
>w:=vector([a,b,c]);
```

使它在以下向量张成的空间中

```
>v1:=vector([-1,2,4]);  v2:=vector([3,5,6]);
 v3:=vector([-1,13,22]);
```

把 w 表示成 v_1,v_2,v_3 的线性组合，写出与之相关的线性方程组，该方程组是相容的吗？证明之.

a,b,c 必须满足什么条件，才使得 w 在 v_1,v_2,v_3 张成的空间中？若 w 不在 v_1,v_2,v_3 张成的空间中，a,b,c 又将满足什么条件？

作业 2

本作业旨在检查一个给定的向量集是否线性相关，考虑向量

```
>v1:=vector([1,-2,-1,1]);  v2:=vector([1,-1,0,1]);
 v3:=vector([3,-5,-2,3]);  v4:=vector([3,2,-1,2]);
```

活动 1

这些向量线性相关吗？写出向量 v_1,v_2,v_3,v_4 的线性组合.

1. 写出与上述线性组合相关的齐次线性方程组.

2. 该方程组是相容的吗？如果是，有唯一解还是无穷多个解？用一个适当的算法回答这些问题.

3. 你得到什么结论？这些向量线性无关还是相关？

4. 若它们线性相关，将其中一个向量写成其它向量的线性组合. 描述由 v_1,v_2,v_3,v_4 张成的最大的子空间. 利用函数 lindep 的交互程式.

```
>lindep(v1,v2,v3,v4);
```

活动 2

对以下向量重复作业 2 中的活动 1

```
>v1:=vector([1,1,0,1,0]);  v2:=vector([2,3,1,0,5]);
 v3:=vector([8,0,2,3,1]);
```

额外实验题

以下向量

```
>v1:=vector([1,2,3]);  v2:=vector([-1,2,3]);
 v3:=vector([0,1,-1]);
```

是线性无关的. 问向量集 $S=\{v_1,2*v_1+v_2,v_3\}$ 线性相关还是无关？证明你的断言.

另选一个线性无关的向量集，并构造一个类似 S 的集合，S 是线性无关还是相关？并由此给出一个一般的结论.

指导实验 3.3 线性空间的基

目　的

本实验旨在巩固关于线性空间的基的知识，以及基和线性方程组之间的联系．

自动 Linalg 函数

在本实验中，你将使用自动函数 lincomb，lindep，basis 和 subspace．在 Maple 的提示符＞？后键入函数名，你将得到该函数的帮助；例如，＞？ lindep；

指　导

1. 为执行一个命令，通过鼠标或键盘将光标移至该行并按 enter 键．
2. 运行一个函数时，若需要，应创建 Maple 输入区；否则输出不能在所需位置上显示．
3. 执行以下命令以便装载软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

作业 1

本作业旨在确定一给定向量集是否为某线性空间的基．考虑向量集：

```
>v1:=vector([-1,2,4,7]);   v2:=vector([3,6,0,1]);
  v3:=vector([1,0,9,5]);    v4:=vector([3,5,1,0]);
```

活动 1

该向量集构成 $\mathbb{R}^4$ 的一个基吗？检查该向量集是否线性无关．

```
>lindep(v1,v2,v3,v4);
```

检查是否 $\mathbb{R}^4$ 中的每个向量 w

```
>w:=vector([a,b,c,d]);
```

均为 v_1, v_2, v_3, v_4 的线性组合．使用 lincomb 的无步骤程式：

```
>lincomb(v1,v2,v3,v4,w);
```

你得到什么结论？这些向量构成基吗？

活动 2

使用 basis 的交互程式验证活动 1 所得结果.

```
>basis(v1,v2,v3,v4);
```

活动 3

由 v_1,v_2,v_3,v_4 张成的子空间的维数是多少?

活动 4

若添加向量 v_5

```
>v5:=vector([3,6,7,9]);
```

到向量集$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$中,向量 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 构成基吗? 解释之.

活动 5

在 n 维空间中任选 $n+1$ 个向量,它们能构成基吗? 为什么?

作业 2

本作业旨在在一个给定的向量集中构造线性空间的一个基.考虑向量

```
>v1:=vector([1,3,5,-1]);      v2:=vector([4,6,7,2]);
 v3:=vector([-6,4,-1,0]);     v4:=vector([6,4,3,-9]);
 v5:=vector([7,-4,2,5]);      v6:=vector([5,9,12,11]);
```

活动 1

这些向量形成 $\mathbb{R}^4$ 的一个基吗? 形成 $\mathbb{R}^4$ 子空间的一个基吗?

活动 2

若不能,怎样选出一个基?

额外实验题

将下列向量扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一个基,扩充唯一吗?

```
>v1:=vector([1,0,0,1]);   v2:=vector([0,1,1,0]);
```

应　用 3.1

再谈炼油厂

目　的

本应用的目的是利用线性空间的想法并且回到第一单元的炼油厂计划.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linspace);
```

关于炼油厂模型的描述

一个公司经营三个炼油厂 R_1,R_2 和 R_3. 每个 $R_i(i=1,2,3)$都生产加热油(HO)、柴油(DO)、汽油 G. 假设在每个炼油厂一桶原油能生产的加热油、柴油、汽油量(加仑)如下:

	R_1	R_2	R_3	需求
加热油	20	5	15	550
柴　油	10	3	8	300
汽　油	10	10	c	d

其中,R_3 每桶原油能生产的汽油量以及对汽油的总需求量都假设未知.

活动 1

设 x_i 是 R_i 加工的原油量(千桶),请写出为满足需求,各厂需加工的原油量所满足的线性方程组.

活动 2

公司发现各厂的汽油产量和汽油需求量是其它两种产品产量和需求量的线性组合. 决定 c 和 d 的值,特别地,确定 R_3 的汽油产量和对汽油的需求量.

活动 3

从活动 2 所得结果,请决定为达到需求,各厂所需原油桶数的取值范围.

活动 4

若汽油的需求量为 700，而 x_1, x_2, x_3 都是整数，求 c 的最小整数解.

活动 5

经过对原始表格的仔细研究，公司决定通过一项新的方针：规定每厂生产的汽油加仑数和汽油的需求量均为柴油的 2 倍，假设我们有一组解 $x_1=15, x_2=50, x_3=0$. 若 $x_3=20$ 求另一组解.（提示：找出矩阵的零空间，并由此来求解. 对此结果如何解释？它反映了这个方针的什么问题？）

活动 6

公司决定关闭 R_3 并同时保持需求量

	R_1	R_2	R_3	需求
加热油	20	5	0	550
汽　油	10	3	0	300
柴　油	10	10	0	600

(1)写出反映这个方针的线性方程组.

(2)该方程组有解吗?

(3)若该方程组 $Ax=b$ 无解，我们可用如下方法得到近似解. 用 A^{T} 左乘该方程组，即 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$，若 $A^{\mathrm{T}}A$ 非奇异则可得到新方程组的解，$x=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$；若 $A^{\mathrm{T}}A$ 奇异则用 Gauss 消元法求解.

1. 写出(1)所得方程的系数矩阵 A 以及向量 b.
2. 用上述方法求出近似解 b_1，即用 $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$ 求出一个解 x_1.
3. 比较需求向量 b 和乘积 $b_1=Ax_1$.
4. 算出 b_1-b 的绝对值，并解释之.(3)中所述方法称为**最小二乘法**.

应用 3.2 竞赛矩阵

目的

本应用旨在给出循环竞赛的一个数学模型.想法是应用线性空间的概念来操作竞赛矩阵的性质.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(linspace);
```

竞赛矩阵的描述

n 个选手的无平局竞赛共有 $n\cdot(n-1)/2$ 场比赛,竞赛结果用 $n\times n$ 竞赛矩阵$A=(a_{ij})$描写.若选手 i 击败选手 j,则 $a_{ij}=1$;否则 $a_{ij}=0$.用 s_i 表示选手 i 击败的人数,用 s_{ij}(联合得分)表示被选手 i 和 j 同时击败的人数.

活动 1

考虑 3 个选手的竞赛矩阵,写出一些 3×3 竞赛矩阵,有多少个 3×3 矩阵能做为竞赛矩阵?(提示:计算对角线下方的元素的数目并且考虑每个元素的可能取值.)

活动 2

(1)所有 3×3 竞赛矩阵的集合线性无关吗? 证明你的断言.

(2)所有 3×3 竞赛矩阵的集合构成所有 3×3 矩阵集合的一个基吗? 若不能,修改该集合使其成为所有 3×3 矩阵的一个基.

活动 3

(1)两个竞赛矩阵的乘积仍为竞赛矩阵吗?

(2)一个竞赛矩阵的乘幂仍为竞赛矩阵吗? 证明你的结论.对不同乘幂的元素给出一个解释.

活动 4

(1)证明竞赛矩 A、A^T 和单位矩阵之和的所有元素均为 1.

(2)计算 A 和 A^{T} 的乘积.解释所得矩阵的每个元素与得分 s_i 以及联合得分 s_{ij}的关系.

(3)证明竞赛矩阵的秩大于等于1.这些矩阵的零度是多少?

(4)求竞赛矩阵 A,使得 $AA^{T}=I$(单位阵).问 A 的秩是多少?

活动 5

对 4×4 竞赛矩阵重复活动 1－活动 4.

活动 6

一个竞赛矩阵称为正则竞赛矩阵,若每个选手得分相同,给出 3×3 和 4×4 正则竞赛矩阵的例子.

活动 7

一个竞赛矩阵称为双正则的,若联合得分均为某数 m.给出 3×3,4×4 双正则竞赛矩阵的例子.

第四单元

内积空间

像距离、角度和正交投影这样的几何概念在许多领域都有重要的应用，包括信号处理、计算机图形和函数逼近等领域. 为了定义这些概念，需要介绍线性空间上的内积这一概念.

课文 4.1

内积

为进一步学习线性空间中的几何对象，比如两向量间的夹角、距离、点到平面的最短距离、向量的正交和其它相关的概念，应该对内积有所了解. 内积通常也被称为数量积和点积.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

代数的定义

首先从欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的例子开始.

例 1.1 令 u 和 v 为 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量.

```
>u:=vector([4,1,7]);   v:=vector([1,3,5]);
```

考虑两向量分量乘积之和

```
>u[1]*v[1]+u[2]*v[2]+u[3]*v[3];
```

结果是一个数而不是向量. 也可使用 Maple 命令求出数值

```
>w1:=innerprod(u,v);
```

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的任两个向量

```
>u:=vector([a,b,c]);   v:=vector([d,e,f]);
```

和两向量分量乘积之和:

```
>u[1]*v[1]+u[2]*v[2]+u[3]*v[3];
```

可以使用以下命令计算出同样的值

```
>'innerprod(u,v)'=innerprod(u,v);
```

计算得出一个数值是向量 u 和 v 的对应分量的乘积之和.

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量 u 和 v 的标准内积是一个数，等于给定向量的对应分量的乘积之和. 因此，如果 $u=[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n]$ 且 $v=[b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n]$，则将 u 和 v 的内积记为 innerprod(u,v)

```
>S:=Sum(ai*bi,i=1..n);
```

性 质

内积必须要满足什么样的性质呢?

考虑例 1.1 中的向量

```
>u:=vector([4,1,7]);  v:=vector([1,3,5]);
```

计算 u 和 v 的内积与 v 和 u 的内积

```
> 'innerprod(u,v)'=innerprod(u,v);
  'innerprod(v,u)'=innerprod(v,u);
```

两个向量 u 和 v 的内积是可交换的;也就是说,innerprod(u,v) = innerprod(v,u) (事实 4.1).

例 1.2 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的一个向量.

```
>v:=vector([x,y]);
```

如果让 v 和其自身进行内积将会如何呢?

```
>innerprod(v,v);
```

该数值总是正的.它的平方根表示在 $\mathbb{R}^2$ 中从原点到点 (x,y) 的距离.

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的向量

```
>v:=vector([x,y,z]);
```

如让 v 和其自身作内积将得到什么呢?

```
>innerprod(v,v);
```

该数值总是正的.其平方根表示在 $\mathbb{R}^3$ 中从原点到点 (x,y,z) 的距离.

例 1.2 中的表达式:

1.表示向量的几何长度的数量值.

2.指示出一个向量与自身作内积后得到的总是正数.除非该向量是一个零向量,则该内积为 0(事实 4.1).

将一个向量乘以一个数会对内积有何作用呢?

例 1.3 考虑两个向量

```
>v:=vector([x,y,z]);  u:=vector([a,b,c]);
```

考虑以下乘积

```
>[lambda*u,v]=innerprod(lambda*u,v);
>lambda*[u,v]=lambda*innerprod(u,v);
```

比较这两个数,是否相等? 由该例子可得

innerprod(k * v,u) = k * innerprod(v,u) (事实 4.1)

内积又是如何作用于向量的和呢?

例 1.4 考虑向量

```
>v:=vector([x,y,z]);  u:=vector([a,b,c]);  w:=vector([p,q,r]);
```

计算以下内积的和

```
>'[v,u]+[v,w]'=innerprod(v,u)+innerprod(v,w);
```

将其与以下内积作比较

```
>'[v,u+w]' = innerprod(v,u+w);
```

该例指出

innerprod(v,u+w) = innerprod(v,u) + innerprod(v,w)（事实 4.1）

总结

定义在一个线性空间 V 中的乘积称之为内积，如果对于 V 中的任意向量 u，v 和 w 以及任意实数 k_1 和 k_2，该乘积都满足以下性质：

- 两个向量的内积是可交换的，即 $<u,v> = <v,u>$.
- 一个向量与自身的内积总是正的，除非该向量为零向量，即 $<u,u>=0$ 当且仅当 u 为零向量.
- 内积是线性的，也就是说 (k_1*u+k_2*v) 和 w 的内积与 k_1*u 和 w 的内积与 k_2*v 和 w 的内积之和相等，亦即

$$<k_1*u+k_2*v,w> = k_1*<u,w> + k_2*<v,w>$$

在此将 v 和 u 的内积记为 $[v,u]$，$<v,u>$ 或 $v\cdot u$. 这些符号都可以用来表示内积.

几何的定义：长度和两向量间的夹角

一个向量的长度是 $L=\sqrt{<v,v>}$. 单位向量是指长度为 1 的向量.

例 1.5　考虑$\mathbb{R}^3$中的一个向量

```
>v: = vector([x,y]);
```

该向量的长度为

```
>L: = sqrt(innerprod(v,v));
```

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的另一个向量

```
>v: = vector([x,y,z]);
>L: = sqrt(innerprod(v,v));
```

两个向量间的夹角与它们的内积之间是否有什么关系呢？让我们回忆一下三角几何学中的余弦定理.

```
>a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(A);
```

在此 a，b 和 c 分别为三角形 ΔABC 三条边 BC、AC 和 AB 的长度.

例 1.6　考虑平面上的向量

```
>oA: = vector([1,1]);   oB: = vector([1,-1]);
 oC: = vector([0,2]);
```

构造三角形 ΔABC 的三角边如下

```
>AB: = vector([0,-2]);   AC: = vector([-1,1]);
 BC: = vector([-1,3]);
```

计算这三个向量的长度

```
>a: = sqrt(innerprod(BC,BC));   b: = sqrt(innerprod(AC,AC));
```

```
c:=sqrt(innerprod(AB,AB));
```

由余弦定理可得

```
>cos(A):=(b^2+c^2-a^2)/(2*b*c);
```

计算比值

```
>innerprod(AB,BC)/(b*c);
```

由以上计算可以得知,可通过如下方式定义内积

$$<u,v> = \text{innerprod}(u,v) = \|v\| * \|u\| * \cos(x)$$

此处 x 为两向量 u 和 v 间的夹角,而 $\|\cdot\|$ 则表示向量的长度.

从内积的几何定义可以得出以下两个推论.

- 两个非零向量 u 和 v 是正交的,当且仅当 u 和 v 的内积 $<u,v>=0$.
- $|<u,v>| \leqslant \|u\| * \|v\|$,并且当一个向量恰为另一向量的倍数时等号成立.

(Cauchy-Schwartz 不等式,事实 4.2).

可以使用内积的几何定义来得出向量的长度、两个向量之间的夹角并构造一个与已知向量正交的单位向量.

例 1.7 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量

```
>v1:=vector([1,-1,0]);  v2:=vector([0,1,0]);
```

确定每个向量的长度

```
>L1:=sqrt(innerprod(v1,v1));
>L2:=sqrt(innerprod(v2,v2));
```

确定 v_1 和 v_2 的内积

```
>[v1,v2]=innerprod(v1,v2);
```

确定两向量间夹角的余弦

```
>cos(alpha):=innerprod(V1,V2)/(L1*L2);
```

确定与 v_1 和 v_2 相正交的一个单位向量.令 w 为该未知向量:

```
>w:=vector([x1,x2,x3]);
```

若单位向量 w 与 v_1 和 v_2 相正交,则必须满足以下等式(由于向量 W 是一个单位向量):

```
>eq1:=innerprod(w,w)=1;
>eq2:=innerprod(w,v1)=0;
>eq3:=innerprod(w,v2)=0;
```

解方程以求出 x_1,x_2 和 x_3.

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{x1,x2,x3});
```

有多少个与 v_1 和 v_2 相正交的单位向量呢?

应 用

• 距一个向量最近的点

例 1.8 从点(0,0)到点(3,1)画一个向量 v,找到 v 上的一个点与点(1,2)最接近.

令 (x,y) 为向量 v 上的任一点,由于点 $P(x,y)$ 在向量 v 上,该点必满足 $x=3y$.故已

给出向量 v 和点 $P(x,y)$:

```
>v:=vector([3,1]);  P:=vector([3*y,y]);
```

为找到与点(1,2)相距最近的点 P,构造向量连接点 $P(x,y)$和点(1,2):

```
>w:=vector([3*y-1,y-2]);
```

按此构造出的向量应与向量 P 垂直,亦即

```
>innerprod(w,P)=0;
```

故欲求的点为

```
>P:=[3/2,1/2]
```

• **平面的方程**

例 1.9 求出一个通过点 $Q(1,3,5)$且法向量为 $N=[1,-1,4]$的平面的方程(一个平面的法向量是指一个与该平面中的所有向量都垂直的向量).为求出该平面方程,取该平面中的任一点 P

```
>P:=[x,y,z];
```

构造连接 P 和 Q 的向量

```
>PQ:=vector([x-1,y-3,z-5]);
```

该平面的法向量为

```
>N:=vector([1,-1,4]);
```

由于该向量 N 与平面上的每个向量都垂直,故该平面的方程为

```
>innerprod(PQ,N)=0;
```

练 习

在以下的练习中可能会用到 Maple 命令:innerprod,vector,matrix,solve.

1.(1)找出一个单位向量

```
>w:=vector([x1,x2,x3,x4])
```

垂直于向量

```
>v1:=vector([0,1,1,0]);  v2:=vector([1,0,1,0]);
```

(2)能够找到多少个这样的单位向量?

2.求出通过三个点 $P(1,0,2)$,$Q(-1,1,1)$和 $R(1,0,0)$的平面方程.

3.考虑以下两个向量

```
>v1:=vector([1,-1,0]);  v2:=vector([0,1,-1]);
```

(1)求出两个向量之间夹角的余弦.

(2)比较并计算

$$\text{innerprod}(v_1,v_2),\quad \text{innerprod}(v_1,v_1),$$
$$\text{innerprod}(v_2,v_2),\quad \text{innerprod}(v_1+v_2,v_1+v_2).$$

4.考虑向量

```
>v:=vector([a,b,c]);
```

描述与 v 垂直的所有向量的集合.

5.令 u 和 v 为 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量.证明满足以下不等式:

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\| \quad (\text{三角形不等式,事实 4.3})$$

6. 令 $u=[u_1,u_2,u_3]$和 $v=[v_1,v_2,v_3]$为 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两个向量,考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的一些乘积:

$$<u,v>=u_1v_1+u_2v_2-u_3v_3,\quad <u,v>=u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3,$$

哪一个表示内积? 请解释.

课 文 4.2 正交投影

正交投影的概念产生于很多实际应用之中.例如在物理学中当研究一个物体沿斜面运动时,我们通过将作用于该物体上的力分解来对运动进行分析.可将该力分解为两部分,一部分沿着该物体运动的方向,另一部分力的作用方向与该方向垂直.由于缺少线性方程系统 $Ax=b$ 的解,人们希望能构造一个对该系统的近似结果.在构造过程中正交投影的概念起了很大的作用.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

什么是正交投影?

首先从以下问题开始.给出两个向量 u 和 v.怎样构造一个与 v 同方向的向量 p 使其与 $w=u-p$ 垂直?

例 2.1 考虑两个向量

```
>v:=vector([x,y]);   u:=vector([1,m]);
```

向量 p 是 u 在 v 上的"正交投影".由于向量 v 与向量 p 在同一个方向上,所以 p 是 v 的倍数,也就是说,$p=t*v$,其中 t 是一个由条件 p 与向量 $u-p$ 相互正交所决定的未知数,亦即 innerprod$(p,u-p)$=innerprod$(t*v,u-t*v)=0$.它等价于

```
>t:=innerprod(v,u)/innerprod(v,v);
```

向量 p 由以下给出

```
>p:=evalm(t*v);
```

向量 w 是

```
>w:=evalm(u-p);
```

w 是否与 p 垂直? 计算 w 和 p 的内积

```
>innerprod(p,w);
```

向量 p 称为 u 在 v 上的**正交投影**,t 是**数量投影**(scalar projection),并且 w 为**正交分量**(orthogonal complement).

例 2.2　考虑向量

```
>v:=vector([7,6]);   u:=vector([4,2]);
```

计算 u 在 v 上的正交投影.首先计算 u 在 v 上的数量投影

```
>t:=innerprod(u,v)/innerprod(v,v);
```

因此,u 在 v 上的正交投影 p 为

```
>p:=evalm(t*v);
```

u 的与 v 正交的分量为

```
>W:=evalm(u-p).
```

向量 p 是 u 在 v 上的正交投影,而 t 则为数量投影.

通常,如 u 和 v 为两个向量,则

比率 t=innerprod(u,v)/innerprod(v,v)称为 u 在 u 上的数量投影.向量 $p=t*v$ 为 u 在 v 上的正交投影.向量 $w=u-p$ 是指向量 u 的正交分量.向量 $w=u-p$ 是 u 的与 v 相垂直的分量.(事实 4.4)

正交分量

一个集合 V 的正交分量是一个集合,该集合中的所有向量都与每个 V 所张成的空间中的向量相互垂直.

例 2.3　考虑由以下向量所张成的集合 V.

```
>v1:=vector([1,0,0]);   v2:=vector([0,1,0]);
```

对集合 V 的正交量进行解析的描述.这是一个所有与 v_1 和 v_2 相正交的向量

```
>w:=vector([x,y,z]);
```

组成的集合.为确定该集合,计算

```
>innerprod(w,v1)=0;   innerprod(w,v2)=0;
```

因此,正交分量为 $w=\{[0,0,Z]\mid Z\in\mathbb{R}\}$.**几何上讲**,该集合就是 Z－轴.

例2.4　计算以下 2×2 矩阵的行空间和列空间的正交分量.

```
>A:=matrix([[1,-1],[1,0]]);
```

1.**行空间的正交分量**.　矩阵 A 的行空间由以下张成

```
>R:=rowspace(A);
```

令 w 为正交分量中的一个向量,则有

```
>w:=vector([x,y]);
>innerprod(R[1],w)=0;   innerprod(R[2],w)=0;
```

因此行空间的正交分量是一个包含{(0,0)}的集合.另一方面,因为 A 是一个非退化的矩阵,所以矩阵 A 的零化空间——即所有使得 $Ax=0$ 成立的向量的集合,包括元素 $x=[0,0]$.在本例中,A 的零化空间与矩阵 A 的**行空间的正交分量**相同.

2.**列空间的正交分量**.　矩阵 A 的列空间由以下张成

```
>C:=colspace(A);
```

令 w 为正交分量中的一个向量,则有:

```
>w:=vector([x,y]);
```

```
>innerprod(C[1],w)=0;   innerprod(C[2],w)=0;
```

因此列空间的正交分量是一个包含{(0,0)}的集合.另一方面,由于 A 是非退化的矩阵,A^T 的零化空间包括平凡集合{[0,0]}.在本例中,A^T 的零化空间与矩阵 A 的**列空间的正交向量**相同.

在一个矩阵的行空间的正交分量和其零化空间之间有何联系呢?

在一个矩阵的列空间的正交分量和其转置的零化空间之间又有何联系呢?

例2.5 计算以下 2×3 矩阵的行空间和列空间的正交分量

```
>A:=matrix([1,-1,1],[1,1,0]);
```

1.**行空间的正交分量**. 矩阵 A 的行空间由以下张成

```
>R:=rowspace(A);
```

令 w 为正交分量中的一个向量,则有

```
>w:=vector([x,y,z]);
>eq1:=innerprod(R[1],w)=0;   eq2:=innerprod(R[2],w)=0;
>solve({eq1,eq2},{x,y,z});
```

因此,行空间的正交分量是一个集合,该集合包含着一个基为([-1,1,2])的一维空间.另一方面,如计算矩阵 A 的零化空间:

```
>nullspace(A);
```

那么,A 的零化空间与矩阵 A 的行空间的正交分量相同.

2.**计算列空间的正交分量**

```
>A:=matrix([[1,-1,1],[1,1,0]]);
```

矩阵 A 的列空间由以下张成

```
>C:=colspace(A);
```

令 w 为正交分量中的一个向量,则有

```
>w:=vector([x,y]);
>innerprod(C[1],w)=0;   innerprod(C[2],w)=0;
```

因此,列空间的正交分量是一个包含{[0,0]}的集合.证明 A^T 的零化空间也是一个平凡集合.在本例中,我们发现 A^T 的零化空间与矩阵 A 的列空间的正交分量也是相同的.

通常一个给定的 $n \times m$ 矩阵 A 满足以下的关系式:

- A 的零化空间与矩阵 A 的**行空间的正交分量**相同.
- A^T 的零化空间与矩阵 A 的**列空间的正交分量**相同.

我们现在定义**内积**和**线性赋范空间**.

内积空间

内积空间 V 是一个已经定义了乘积 $<v,u>$ 的线性空间,并且对于 V 中的所有 v,u 和 w,以及任意实数 k_1 和 k_2,都满足以下性质:

- $<v,v>=0$ 当且仅当 $v=0$
- $<v,u>=<u,v>$
- $<k_1*u+k_2v,w>=k_1*<u,w>+k_2*<v,w>$

$<v,u>$具有以上性质则称为**内积**. 如 V 是一内积空间,则 v 在 V 中的范数(norm)为 $\|v\|=\sqrt{<v,v>}$.

线性赋范空间

如果一个线性空间 V 满足以下条件,则称之为**线性赋范空间**.

• $\|v\|\geqslant 0$, $\|v\|=0$ 当且仅当 $v=0$(对于所有 V 中的向量).

• $\|av\|=|a|\|v\|$ 对于任一数值 a 和任一 V 中的向量 v 均成立.

• $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$ 对于 V 中的任意 u 和 v 均成立,且当一个向量为另一个向量的倍数时等号成立.该性质称为三角形不等式.

所有考虑过的例子都与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量密切相关.实际上并不一定非要限制在这种空间中进行研究.比如我们可以选择空间 $C[-1,1]$,即定义在区间$[-1,1]$上的连续函数所组成的空间,或是所有区间$[-\pi,\pi]$上的连续周期函数所组成的空间 $C[-\pi,\pi]$.例如,在 $C[-1,1]$上可以定义乘积为

```
> '<f,g>'=Int(f(x)*g(x),x=-1..1);
```

该乘积是否为一个内积呢? 检验

```
> '<f,f>'=Int(f(x)*f(x),x=-1..1);
```

而它通常都是正的,除非 $f=0$.

```
> '<f,g>'=Int(f(x)*g(x),x=-1..1);
  '<g,f>'=Int(f(t)*g(x),X=-1..1);
```

由以上可知该乘积为可交换的.

```
> '<k1*f+k2*g,h>=Int((k1*f(x)+k2*g(x))*h(x),x=-1..1);
> 'k1<f,h>+k2<g,h>'=Int((k1*f(x)*h(x)),x=-1..1)
                   +Int((k2*g(x)*h(x)),x=-1..1);
```

因此该乘积是线性的.所以是一个内积并且赋予此乘积的 $C[-1,2]$是一个内积空间.

最小平方逼近(估计)

在应用 3.1 中引入了最小平方问题.系统 $Ax=b$ 在 b 不属于 A 的列空间中时没有解.此时需得出一个近似解.该问题可叙述如下:

找到一个 x 使得范数 $\|b-Ax\|$ 为最小.

算法:如果向量 b 包含于 A 的列空间中,则 x 为 $Ax=b$ 的解.如果 b 不在 A 的列空间之中,则找出 b 在 A 的列空间上的投影.此时 $b-b_1$ 与 A 的列空间正交.亦即,$b-Ax_1$ 与 A 的每一列都相互垂直.由此可得

$$A^{T}Ax = A^{T}b$$

这被称为**标准方程**.标准方程的解 x 为初始方程组的最小平方解.

例 2.6 给出以下矩阵

```
>A:=matrix([[4,0],[0,2],[2,2]]);
 b:=matrix([[2],[0],[5]]);   x:=matrix([[x1],[x2]]);
```

找出最小平方解

```
>evalm(A)*evalm(x)=evalm(b);
```

方程组 $Ax=b$ 是不相容的,可以通过写出增广矩阵来加以证实

```
>AUG:=matrix([[4,0,2],[0,2,0],[2,2,5]]);
```

并应用 Gauss 消去法

```
>ReduceMatrix:=gausselim(AUG);
```

化简后的矩阵显示出该方程组是不相容的,因为 b 并不在 A 的列空间中.因此我们得到的是一个近似解.

最小平方化过程

用 A^{T} 左乘方程组 $Ax=b$ 的两端,得

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b.$$

通过将 A 左乘自身的转置以构造矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$

```
>trAA:=multiply(transpose(A),A);
```

通过将 b 左乘 A^{T} 以构造矩阵 $A^{\mathrm{T}}b$.

```
>trAb:=multiply(transpose(A),b);
```

新方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 是相容的.

```
>evalm(trAA)*evalm(x)=evalm(trAb)
```

构造新方程组的增广矩阵:

```
>AUG1:=matrix([[20,4,18],[4,8,10]]);
```

应用 Gauss 消去法

```
>AUG2:=gausselim(AUG1);
```

通过对简化的矩阵 AUG2 进行回代(backsubstitution)以得到最小平方解

```
>x1:=backsub(AUG2);
```

计算误差 $\|Ax_1-b\|$.

学习过程

使用自动函数 leastsqrs 以获得最小平方解.重做例子 2.6.

```
>AUG:=matrix([[4,0,2],[0,2,0],[2,2,5]]);
>leastsqrs(AUG);
```

重复用不同的矩阵练习并最终掌握该过程.

最小平方化的图形化演示

该演示的目的是为了找到一个所需次数的多项式,使其能够最好地对一系列点进行拟合.你可以输入任何一列点以及最小平方多项式的所需次数.例如,找出一个三次多项式使其与以下的点拟合

```
>L:={[1,2],[2,1],[3,3],[3,-1],[4,2],[-2,2]};
>Lsqrdemo(   );
```

练 习

在以下的练习中需要使用 leastsqrs,以及 Maple 命令 innerprod,crossprod,solve,vector 和 matrix.

1. 计算向量 v 在向量 u 上的正交投影

```
>v:=vector([1,2,3,-1]);  u:=vector([-1,0,5,7]);
```

2. 计算在以下向量所张成的子空间

```
>v:=vector([3,4,1]);  u:=vector([-2,1,1]);
```

上如下向量的正交投影

```
>w:=vector([6,3,-2]);
```

3. 找出由向量 v_1 和 v_2 所张成的子空间 S 上的距向量 w 最近的点

```
>w:=vector([2,1,5,1]);  v1:=vector([2,1,-1,1]);
 v2:=vector([0,-1,1,-1]);
```

4. 找出方程组 $Ax=b$ 的最小平方估计,这里

```
>A:=matrix([[1,1,0],[1,1,0],[1,0,1],[1,0,1],[1,0,0]]);
 b:=matrix([[-1],[2],[3],[2],[4]]);
 x:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
```

5. 找出方程组 $Ax=b$ 的最小平方估计,这里

```
>A:=matrix([[1,1,0,0],[1,1,0,0],[1,0,1,0],[1,0,1,0],
            [1,0,0,1],[1,0,0,1]]);
 b:=matrix([[-1],[2],[3],[2],[4],[5]]);
 x:=matrix([[x1],[x2],[x3],[x4]]);
```

是否有唯一的最小平方解呢? 解释你的看法.

6. 找出向量的行空间和列空间的正交分量

```
>A:=matrix([[1,-1,2,3,1],[2,0,1,-2,4],[3,9,1,-4,2]]);
```

7. 考虑在空间 $C[-1,1]$上的标准积分内积,即对于在 $C[-1,1]$中的任意两个函数 f 和 g,定义 f 和 g 的内积如下

```
>fg:=Int(f(x)*g(x),x=-1..1);
```

令

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x\right\}$$

为所有次数小于或等于 1 的多项式的集合的一组基.

(1)计算由集合 B 所张成的子空间上的函数 e^{2x}的正交投影.

(2)求出函数 e^{2x}的最小平方线性估计 $a+bx$.

课文 4.3 Gram-Schmidt 正交化

向量空间的一组基是其建立的基础.向量空间中的每一个元素都可以唯一地表示为一组基的线性组合.在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中,十分容易用一组标准基来表示一个向量.然而如果这组基不是已标准化的,那么表示的求出过程可能会变得十分繁琐.另一个十分特别而且有用的基为**正交基**.用正交基可以十分容易地表示任何一个向量.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

正交集

例 3.1 令 $B=\{u,v\}$为$\mathbb{R}^2$的一组基

```
>u:=vector([-2,3]),   v:=vector([3,2]);
```

令 w 为 $\mathbb{R}^2$中的任意向量

```
>w:=vector([x,y])
```

用 B 来表示向量w:

```
>evalm(w)=c1*evalm(u)+c2*evalm(v);
```

用这组基来表示 w 的问题被简化为求解关于c_1 和 c_2 的以下方程组:

```
>eq1:=-2*c1+3*c2=x;   eq2=3*c1+2*c2=y;
>solve({eq1,eq2},{c1,c2});
```

因此

```
>c1:=3/13*y-2/13*x;   c2=2/13*y+3/213*x;
>evalm(w)=c1*evalm(v)+c2*evalm(u);
```

进一步考察集合 B.从向量 u 和v 的内积开始.

```
>innerprod(u,v);
```

两个向量 u 和v 相互垂直.让我们看看是否可以通过其它方式得到 c_1 和 c_2 的值,而不是通过解一个关于 c_1 和 c_2 的方程来得出这种用基向量 u 和v 来表示向量w 的数组.

如果 $w=c_1*u+c_2*v$,则由 u 和w 的内积与v 和w 的内积分别得出如下结果

```
>c1:=inndrprod(w,u)/innerprod(u,u);
>c2:=inndrprod(w,v)/innerprod(v,v);
```

与先前得出的 c_1 和 c_2 的值进行比较.亦即,如果基是正交的话.则 c_1 和 c_2 将会更易于得出.集合 B 称为 $\mathbb{R}^2$ 的一组**正交基**.

例 3.2 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的包含以下向量的一组基 B.

```
>u1:=vector([-1,1,1]);   u2:=vector([2,1,1]);
 u3:=vector([0,-5,5]);
```

这是一组正交基吗?作内积判断.

```
>innerprod(u1,u2);   innerprod(u2,u3);   innerprod(u1,u3);
```

所以,集合 B 是一组正交基.尝试表示 $\mathbb{R}^3$ 中的任一向量 w.

```
>w:=vector([x,y,z]);
```

将其表示为基 B 的线性组合($w=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$).由于向量之间相互垂直,则由 w 与 u_1,u_2 和 u_3 的内积得到:

```
>c1:=innerprod(w,u1)/innerprod(u1,u1);
>c2:=innerprod(w,u2)/innerprod(u2,u2);
>c3:=innerprod(w,u3)/innerprod(u3,u3);
```

如 w 为向量

```
>w:=vector([-1,2,3]);
```

则它可以由 u_1,u_2 和 u_3,并通过以下数值 c_1,c_2 和 c_3 来表示:

```
>c1:=innerprod(w,u1)/innerprod(u1,u1);
>c2:=innerprod(w,u2)/innerprod(u2,u2);
>c3:=innerprod(w,u3)/innerprod(u3,u3);
```

故此,向量 $W=[-1,2,3]$等于

```
>evalm(w)=c1*evalm(u1)+c2*evalm(u2)+c3*evalm(u3);
```

内积空间 V 中的一组向量$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$称为**正交的**当且仅当各向量是相互正交的,亦即对于所有的 $i,j(i\neq j)$,有 innerprod(v_i,v_j)=0.

如 $B=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为内积空间 V 的一组正交基,则 V 中的任一向量 w 可写为如下的线性组合:

$$w=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+\cdots+c_nu_n,$$

其中 c_i=innerprod(w,u_i)/innerprod(u_i,u_i),$i=1,2,\cdots,n$.(事实 4.5)

正交集和线性无关

是否每一个正交的向量集都是线性无关的呢?逆命题又是否成立呢?

例 3.3 考虑 $\mathbb{R}^4$ 中的以下集合

```
>u1:=vector([1,1,-1,0]);   u2:=vector([0,0,0,3]);
 u3:=vector([0,-1,-1,0]);
```

这些向量是相互垂直的吗?

```
>innerprod(u1,u2);   innerprod(u1,u3);   innerprod(u2,u3);
```

这是否组成了 $\mathbb{R}^4$ 中的一个线性无关的集合呢?一组向量是线性无关的,也就是说集合

$\{u_1,u_2,u_3\}$的一个零组合,即 $c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$ 可推出所有的数值都为 0. 由于向量 u_1,u_2 和 u_3 是正交的,如此线性组合而成的向量的内积可推导出 $c_1=c_2=c_3=0$. 因此,向量之间是线性无关的.

例 3.4 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的一个线性无关的向量集.

```
>u1:=vector([1,1,-1]);   u2:=vector([0,0,3]);
 u3:=vector([0,-1,-1]);
```

以上向量是否构成了 $\mathbb{R}^3$ 的一组正交基?

如果 $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是一个内积空间中的相互正交非零向量组成的非空子集,则集合 B 是线性无关的.(事实 4.6)

该陈述的逆命题是否正确? 亦即,如果向量集合 $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是线性无关的,那么集合 B 是否为一正交子集呢?

规范正交基(ONB)

例 3.5 考虑正交向量集

```
>u1:=vector([1,1,-4]);   u2:=vector([2,2,1]);
 u3:=vector([1,-1,0]);
```

每个向量的长度为

```
>Lu1:=sqrt(innerprod(u1,u1));
 Lu2:=sqrt(innerprod(u2,u2));
 Lu3:=sqrt(innerprod(u3,u3));
```

将每个向量除以其长度则得到三个相互垂直的单位向量:

```
>w1=:evalm(u1/Lu1);   w2:=evalm(u2/Lu2);
 w3:=evalm(u3/Lu3);
```

该集合是否组成了 $\mathbb{R}^3$ 的一组基? 此集合是线性无关的,因此是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 一组基如果是由一些相互垂直的单位向量所组成的则称之为**规范正交基**.

考虑以下向量

```
>w:=vector([-5,56,72]);
```

并将其表示为向量 w_1,w_2 和 w_3 的一个线性组合. 既 $w=c_1w_1+c_2w_2+c_3w_3$.

```
>c1:=innerprod(w,w1);   c2:=innerprod(w,w2);
 c3:=innerprod(w,w3);
```

由上可得

```
>w:=c1*w1+c2*w2+c3*w3;
```

并证明这确实就是 w:

```
>evalm(w)=c1*evalm(w1)+c2*evalm(w2)+c3*evalm(w3);
```

线性空间 V 的一规范正交基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是一组由相互正交的单位向量组成的基.

如果$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是内积空间 V 的一组规范正交基,且 w 为 V 中的任一向量,则

$$w = c_1*v_1+c_2*v_2+c_3*v_3+\cdots+c_n*v_n,$$

这里,c_i = innerprod(w, vi).

规范正交基的 Gram-Schmidt 构造

检验给定的集合是否线性无关.如果是的话,构造一组正交基;否则,从中提取一个线性无关的集合并进行构造.假设集合 $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为线性无关的.

1.构造第一个向量

$$u_1 = v_1/\|v_1\|.$$

2.找出 v_2 在 u_1 上的正交投影

$$p_1 = \text{innerprod}*(v_2,u_1)u_1,$$

并构造向量 $w_2=v_2-p_1$.则该正交基的第二个向量为

$$u_2 = w_2/\|w_2\|.$$

3.求出 v_3 在 u_1 和 u_2 张成的空间 $\text{span}(u_1,u_2)$上的投影

$$p_2 = \text{innerprod}(v_3,u_2)u_2 + \text{innerprod}(v_3,u_1)u_1.$$

并构造向量 $w_3=v_3-p_2$.则该正交基的第三个向量为

$$u_3 = w_3/\|w_3\|.$$

4.重复以上过程直到正交集中所有的向量都已被处理.最终得到的集合$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为一个规范正交基.该过程称为 Gram-Schmidt 正交化.(事实 4.7)

学习过程

为学习 Gram-Schmidt 过程,执行 GramSchmidt 函数的演示模式.例如:

```
>v1:=vector([3,4]);   v2:=vector([6,8]);
  v3:=vector([-1,1]);
>GramSchmidt(v1,v2,v3);
```

在继续之前自己举出几个例子.

正交矩阵

一个 $n\times n$ 矩阵称为**正交矩阵**,如其列组成一正交集合.

例 3.7 考虑$\mathbb{R}^3$中的正交基

```
>u1:=vector([3/5,4/5,0]);   u2:=vector([-4/5,3/5,0]);
  u3:=vector([0,0,1]);
```

构造一个列为向量 u_1,u_2 和 u_3 的矩阵

```
>A:=augment(u1,u2,u3);
```

该矩阵的列组成了一个**正交集合**,因此矩阵 A 称为**正交矩阵**.让我们来学习它的一些性质,例如 A^T:

```
>trA:=transpose(A);
```

A 和 A^T 的乘积是什么呢?

```
>AtrA=multiply(A,trA);
```

矩阵 A 的行列式是什么? 正交矩阵 A 的逆又是什么? 通常,一个正交矩阵 A 有如下性质.

- 矩阵的逆与其转秩相等,即有 $A^{-1}=A^T$.
- 矩阵的行列式等于 $+1$ 或 -1.

练 习

在以下练习中需要使用函数 GramSchmidt 和 Maple 的命令 innerprod, crossprod, solve, vector, matrix 和 evalm.

1. 找出矩阵列空间的一组正交基

```
>A:=matrix([[1,3,5],[-1,-3,1],[0,1,3],[1,5,3]]);
```

2. 对于由以下向量所张成的子空间，构造一组规范正交基，使用 GarmSchmidt 函数的交互程式，

```
>v1:=vector([1,-1,1,1]);   v2:=vector([0,1,2,6]);
 v3:=vector([0,1,0,1]);    v4:=vector([1,1,3,1]);
```

使用这组规范正交基来表示以下向量

```
>w:=vector([1,-1,6,7]);
```

3. (1)对于所有的次数小于或等于 2 的多项式，从线性无关的函数集 $\{1, x, x^2\}$ 中构造一个以上多项式集合的规范正交基.

```
>f:=x->1;  g=x->x;  h=x->x^2;
```

进行内积运算

```
>pq:=Int(p(x)*q(x),x=-1..1);
```

(2)将(1)中的那组基扩充为所有次数小于或等于 3 的多项式集合的一组规范正交基.

(3)近似函数：

```
>s:=x->x^3+2*x-1;
```

为(2)中的基的一个线性组合.

4. (1)计算使矩阵 A 为正交矩阵的 a, b 和 c 的值.

```
>A:=matrix([[1/sqrt(2),0,1/sqrt(2)],
            [1/sqrt(2),0,-1/sqrt(2)],[a,b,c]]);
```

(2)计算 a, b 和 c 的值，使矩阵 A 为一正交矩阵

```
>A:=matrix([[1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(2)],[a,b,c],
            [1/sqrt(2),0,-1/sqrt(2)]]);
```

(3)计算 a, b, c, d, e, f, g 和 h 的值，使得矩阵 A 为一正交矩阵.

```
>A:=matrix([[1/3,1/3,a,b],[1/3,-1/3,c,d],
            [1/3,1/3,e,f],[1/3,-1/3,g,h]]);
```

5. 本练习是本节的练习 3 和课文 4.2 中的练习 6 的延续. 给出在空间 $C[-1,1]$ 上的标准积分内积——亦即，对于 $C[-1,1]$ 中的任意两个函数 f 和 g——定义 f 和 g 的内积如下

```
>fg:=Int(f(x)*g(x),x=-1..1);
```

令 $B=\{1, x, x^2, x^3\}$ 为所有次数小于或等于 3 的多项式集合的一组基.

(1)使用给定的内积将集合 B 转换为正交基 B_1.

(2)计算 $C[-1,1]$ 中的函数 f 在由集合 B_1 所张成的子空间上的正交投影.

(3)求出对于函数 e^{2x} 的最小平方线性 $(a+bx)$、二次 $(a+bx+cx^2)$ 和三次逼近 $(a+bx+cx^2+dx^3)$.

(4)确定哪个逼近是对函数 e^{2x} 的更好的估计.

课 文 4.4

QR－分解

如 A 为一 $m\times n$ 矩阵.作为构造矩阵 A 列空间的正交基的结果,人们可以得到一个乘积 QR 作为矩阵A 的因式分解.在此,矩阵 Q 的列由该正交基构成,而矩阵 R 是一个主对角线上元素全为正的上三角矩阵.该分解很有用,例如,在求逆运算,解线性方程组的运算和求特征值时都可以使用该分解.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(linpdt);
```

QR－算法的描述

例 4.1 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[1,0,2],[1,1,0]]);
```

矩阵的列向量是线性无关的.

```
>v1:=vector([1,1,1]);  v2:=vector([1,0,1]);  v3:=vector([1,2,0]);
```

1.将向量集合$\{v_1,v_2,v_3\}$变换为一正交集.对向量 v_1 进行单位化以得到第一个规范正交向量 u_1.

```
>r11:=sqrt(innerprod(v1,v1));
 u1:=evalm(1/r11*v1);
```

找出向量 w_2 使之与 u_1 垂直

```
>r12:=innerprod(v2,u1);
 p1:=evalm(r12*u1);  W2:=evalm(v2-p1);
```

将向量 w_2 单位化以得到第二个规范正交向量 u_2.

```
>r22:=sqrt(innerprod(w2,w2));  u2:=evalm(1/r22*w2);
```

通过计算内积来求出第三个规范正交向量.

```
>r13:=innerprod(v3,u1);  r23:=innerpord(v3,u2);
 p2:=evalm(r23*u2+r13*u1);  w3:=evalm(v3-p2);
```

对向量 w_3 单位化以得到第三个规范正交向量 u_3.

>r33:=sqrt(innerprod(w3,w3)); u3:=evalm(1/r33*w3);

2.构造一个列向量分别为规范正交向量 u_1,u_2 和 u_3 的矩阵.

>Q:=augment(u1,u2,u3);

3.构造一个各个元素 r_{ij} 为由第1步所得出的值的上三角矩阵 R.

>R:=matrix([[r11,r12,r13],[0,r22,r23],[0,0,r33]]);

将矩阵 Q 和矩阵 R 相乘.

>multiply(Q,R);

则得到矩阵 A.

学习过程

使用 QRdecomp 命令的演示模式学习该过程

例 4.2 考虑

>A:=matrix([[1,0,-1],[1,1,0],[1,1,1]]);

使用以下函数求出 A 的 QR-因式分解.

>QRdecomp(A);

自己选取矩阵练习并掌握该过程.

练 习

在以下练习中需要使用自动生成函数 QRdecomp 和 GramSchmidt,以及 Maple 命令 solve,evalm,matrix,vector,innerprod 和 crossprod.

1.求出下列矩阵的 QR-分解

>A:=matrix([[1,2,5],[-1,1,-4],[-1,4,-3],[1,-4,7]]);

2.考虑矩阵

>A:=matrix([[1,2,5],[1,1,0],[1,1,2],[1,3,3]]);
b:=matrix([[2],[5],[6],[7]]);

(1)求出 $Ax=b$ 的最小平方解.

(2)得出矩阵 A 的 QR-分解.

(3)证明最小平方解是由 $x_1=R^{-1}Q^{\mathrm{T}}b$ 给出的.

指导实验 4.1 正交基和 QR－分解

本实验的目的在于巩固内积空间的基本概念，包括 GramSchinidt 正交化过程和 QR－分解.

自动 Linalg 函数

在本实验中会使用到自动生成函数 GramSchmidt，QRdecomp 和 leastsqrs. 获取函数的帮助可以在 Maple 命令行中键入>？函数名，例如，>？GramSchmidt；

指　导

1. 使用鼠标或键盘将光标移至该行并按回车键即可执行一个命令.
2. 创建 Maple 的输入区域以确保能够在希望的位置显示输出.
3. 执行以下命令以装载软件包：

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

作业 1

本作业的目的是学习内积和它的一些具体意义. 令 u 和 v 为 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量

```
>u:=vector([1,-2,1]);   v:=vector([-3,1,4]);
```

活动 1

求出 u 和 v 这两个向量的内积.

活动 2

求出向量 u 和 v 之间的夹角的余弦.

活动 3

求出 u 在 v 上的正交投影.

活动 4

求出与 u 和 v 都垂直的单位向量 $w=[a,b,c]$.

活动 5

求出经过点 $P(1,1,1)$的平面的方程，w 为该平面的法向量.

活动 6

该平面与点 $Q(0,1,-1)$的最短距离是多少?

作业 2

该作业的目的使用 GramSchmidt 方法来构造一个规范正交基.然后求出矩阵的 QR-分解.令 B 为 $\mathbb{R}^3$的子集：

```
>u1:=vector([1,-1,1]);   u2:=vector([0,1,0]);
 u3:=vector([1,0,1]);    u4:=vector([0,1,2]);
```

活动 1

集合 B 是否线性无关？如不是，则从中取出一个线性无关的子集 B_1.

活动 2

用 B_1 构造一个由 B_1 所张成的子空间的规范正交基.使用 GramSchmidt 命令的交互程式.

活动 3

构造矩阵 A 的 QR-分解，矩阵 A 的列由集合 B_1 中给出的向量所组成.确定矩阵 Q 并求出矩阵 R.

作业 3

本作业的目的是将 QR-分解与矩阵 A 的**广义逆**这一概念相联系.考虑矩阵

```
>A:=matrix([[2,1],[1,1],[2,3]]);
```

活动 1

构造矩阵 A 的 QR-分解中的矩阵 Q.使用 QRdecomp 的交互程式.

活动 2

验证乘积 QR 与矩阵 A 相等.

活动 3

计算矩阵 R^{-1}与 Q^{T} 的乘积.

活动 4

计算矩阵$(A^{T}A)^{-1}$与 A^{T} 的乘积.

活动 5

比较活动 3 和 4 的结果.计算 $R^{-1}Q^{T}$ 与 A 的乘积.**注意**：矩阵 $R^{-1}Q^{T}$ 或$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$ 称为矩阵 A 的**广义逆**.(矩阵 A 是单侧可逆的.)

作业 4

该作业的目的是将作业 3 中的广义逆的概念应用到像用一条曲线连接一系列点这样的问题. 考虑以下一组点:

```
>P1:=[1,2];  P2:=[-1,0];  P3:=[1,1];
 P4:=[3,5];  P5:=[8,-3];  P6:=[4,3];
```

活动 1

假设我们希望用一条二次曲线 $y=ax^2+bx+c$ 来连接这些点. 写出解 a,b 和 c 所需的线性方程组. 该方程组是否有解呢? 检验答案的正确性.

活动 2

将该方程组写成 $Ax=b$ 的矩阵形式, A 为系数矩阵, x 为未知的矩阵, 而矩阵 b 的元素是方程的值. 输入矩阵 A, x 和 b.

活动 3

构造矩阵 A 的广义逆 P.

活动 4

将 $Ax=b$ 的两边同乘以广义逆 P, 并解该方程组.

活动 5

依照估计值 a,b 和 c 写出连接给定点的二次曲线.

活动 6

计算每一个点的实际值和估计值间的差别, 最大的误差为多少?

额外实验题

1. 比较作业 4 中问题的解和其最小平方解.

2. 考虑上三角矩阵:

```
>A:=matrix([[a,b,c],[0,d,e],[0,0,f]]);
```

求出 a,b,c,d,e 和 f 的值, 如果矩阵 A 的各列是相互正交的话. 将该结果推广到任意 $n\times n$ 矩阵上.

指导实验 4.2 正交基和最小二乘法的应用

目 的

本实验的目的是应用内积空间中包括 GramSchmidt 正交化过程和 QR－分解这些概念以得到一线性方程组的最小平方解.

自动 Linalg 函数

本实验中将使用以下的交互函数:GramSchmidt,QRdecomp 和 leastsqrs. 在 Maple 命令行中键入>? 函数名,来获得该函数的帮助.例如,>? GramSchmidt;

指 导

1. 使用鼠标或键盘将光标移至该行并按回车键即可执行一个命令.
2. 创建 Maple 的输入区域以确保能够在所希望的位置显示输出.
3. 执行以下命令以装载软件包:

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

作业 1

本作业的目的是使用内积来构造一个线性方程组的近似解.考虑由 $Ax=b$ 所给出的线性方程组,其中系数矩阵为

```
>A:=matrix([[1,2,-1],[2,3,1],[-1,-1,-2],[3,5,0]]);
 b:=matrix([[1],[0],[1],[0]]);
```

活动 1

求出矩阵 A 的列空间的一组基 B. 向量 b 是否包含在 A 的列空间中? 方程组 $Ax=b$ 是否相容?

活动 2

构造 A 的列空间的一组规范正交基 B_1.

活动 3

构造一个向量 b_1,它是基 B_1 中元素的线性组合,系数为向量 b 与B_1 中元素的内积.

活动 4

方程组 $Ax=b$ 和$Ax=b_1$ 哪一个是相容的? 如果相容的话,求出所有的解 x.

活动 5

在欧氏范数中,对所有的 x,下式

$$\|Ax-b_1\| \leqslant \|Ax-b\|$$

是否成立? 何时等号成立?

作业 2

本作业的目的是将最小平方解和 QR-因式分解应用到线性回归的问题中.求出最小平方直线的系数:

```
>y:=beta0+beta1*x;
```

使之能最好地拟合以下数据.

```
>P1:=[1,2];  P2:=[3,2];  P3:=[5,7];  P4:=[7,9];
```

活动 1

如果数据点位于 y 轴上,其系数应满足什么样的条件?

活动 2

写出矩阵 A 的系数、预测值 b 和未知向量 x.

活动 3

该方程组是否相容? 如不是,则计算能最好地拟合数据的最小平方解.

活动 4

绘制最佳拟合直线和数据点.

额外实验题

将作业 2 中的结果推广以求最小平方曲线的系数

```
>y:=beta0+beta1*x+beta2*x^2;
```

使其最佳地拟合作业 2 中的数据,并与活动 4 中的绘制结果作比较.

应 用 4.1

人口变动模型

本应用的目的是将本单元的所学概念应用到人口变动模型上.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

人口变动模型的描述

两个物种 A 和 B 在一块土地上竞争生存. A 的增长速度为其自身数目的 30% 加上 B 现有数目的 20%；物种 B 的增长速度为自身数目的 40% 减去 A 的现有数目乘比率 k，我们想要确定不同的 k 对物种中生物数目的影响. 令 A_i 和 B_i 分别为物种 A 和 B 在时间段 i 的数目. 进一步假定物种 A 和 B 的初始数目为 $A_0=100$ 和 $B_0=300$.

活动 1

写出在任意时间段描述物种数目的数学等式.

活动 2

将等式写成矩阵形式 $D_{i+1}=PD_i$, $D_i=\text{matrix}([[A_i],[B_i]])$，且 P 为系数矩阵.

活动 3

计算矩阵 P 的前五次幂.

活动 4

(1)选择 $k=0.1$，计算每个物种在 $i=1,2,3,4,5$ 时的数目.

(2)选择 $k=0.2$，计算每个物种在 $i=1,2,3,4,5$ 时的数目.

活动 5

从活动 4 的计算中，当变动比率 k 时可以对每个物种的数目大小作出何等推断？详细地说，你认为每个物种的数目是否会持续增长呢？是否在某个时间段上其数目的增减趋势会发生转变？而这与比率 k 又有何关系？

活动 6

假定系数矩阵

```
>P:=matrix([[a1,a2],[b1,b2]]);
```

使用最小二乘法确定 a_1, a_2, b_1 和 b_2 的值,对从活动 4(1)中获得的数据(如下的一张表):

i	0	1	2	3	4	5
A_i	100	190	329	438	849	1301
B_i	300	410	555	744	987	1298

进行拟合,将 a_1, a_2, b_1 和 b_2 的值与活动 2 中的矩阵 P 的元素作比较,会有什么结果.

应 用 4.2

正交函数展开和信号处理

目 的

本应用的目的是学习一类正交多项式并将其与信号处理中的问题联系起来.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linpdt);
```

勒让德多项式

考虑区间$[-1,1]$上的连续函数所构成的线性空间$C[-1,1]$.勒让德多项式类可用于逼近$C[-1,1]$中的函数.我们将研究这类多项式并指出如何使用其对$C[-1,1]$中的函数进行逼近.从线性无关的函数集开始

```
>S:={1,x,x^2,x^3,x^4};
```

并在$C[-1,1]$中定义两个函数的内积.

```
>pdt:=int(b(x)*c(x),x=-1..1);
```

活动 1

构造头 5 个正交多项式 $p[i]$, $i=0,1,2,3,4$(提示:使用 GramSchmidt 正交化过程,不需使用自动生成函数).前两个这样的多项式如下

```
>p[0]:=1/sqrt(2)*1;
>w[1]:=x-int(x*P[0],x=-1..1)*P[0];
>p[1]:=1/sqrt(int(w[1]*w[1],x=-1..1))*x;
```

活动 2

假设函数 $f(x)=\sin(x)$:

```
>f:=x->sin(x);
```

使用正交多项式 $g(x)$逼近以上函数.

```
>g(x):=sum(a[i]*P[i],i=0..4);
```

对于 $i=0,1,2,3,4$,确定系数,例如 $a[0]$为

```
>a[0]:=int(P[0]*g(x),x=-1..1);
```

绘制 sin(x)的图形和其在区间[-1,1]上的近似值,在同一坐标系上,近似值是否合理?

```
>plot({f(x),g(x)},x=-1..1);
```

活动 3

对函数 $f(x)=\cos(x)$重复活动 2.

活动 4

如 $p[i]$, $i=0,1,2,\cdots$是由所有从线性无关集$\{x^i, i=0,1,2,\cdots\}$中构造出的这样的正交多项式的集合,确定 n 次正交多项式的普适公式以及以下展开式的系数

```
>f:=x->sum(a[i]*P[i],i=0..infinity);
```

三角多项式

考虑由周期为 2π 的连续周期函数组成的线性空间 $C[0,2\pi]$,且集合

$$S=\{1,\cos(x),\sin(x),\cos(2x),\sin(2x),\cdots\},$$

定义 $C[0,2\pi]$中的内积

```
>pdt:=int(a(x)*b(x),x=0..2*Pi);
```

活动 1

指出集合 S 为正交集.(**提示**:考虑 $\cos(mx)$和 $\sin(nx)$对于不同的 m 和 n 的乘积.)

活动 2

将集合 S 转换为一个正交集.

活动 3

以下的多项式是正交三角多项式的例子.

```
>p:=x->sum(a[k]*cos(k*x)+b[k]*sin(k*x),k=0..n);
```

得出在此展开式中确定系数 a_k 和 b_k 的方式.

活动 4

假设以下函数可被多项式 $p(x)$逼近.

```
>f:=x->x^2;
```

对于该函数 $f(x)$确定系数 a_k 和 b_k.在同一坐标系中,画出 x^2 和其在区间$[0,2\pi]$的近似值.该近似是否合理?

信号处理及取样

在本应用中,我们从一样本数据点处提取一连续信号.令 f 为一函数,值$f[0]$, $f[1]$, $f[2]$, $\cdots$, $f[n-1]$已知,并与区间$[0,2\pi]$中的点相应处 $t[0]=0$, $t[1]=\frac{2\pi}{n}$, $t[2]=2\frac{2\pi}{n}$, $\cdots$, $t[n-1]=(n-1)\frac{2\pi}{n}$的值相等.

定义

```
>i:=sqrt(-1);k:='k';
```

进一步,假设函数 f 是一周期函数

```
>f:t->sum(a[k]*exp(k*I*t),k=0..n-1);
>f(t);
```

当 $f(t)$通过点$(t[k],f[k])$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时确定系数 a_k 的值.

活动 1

假定信号在取样点 $t[0]=0$, $t[1]=\frac{\pi}{2}$, $t[2]=\pi$, $t[3]=\frac{3\pi}{2}$处的样本值为 $f[0]=0$, $f[1]=1$, $f[2]=2$, $f[3]=3$.

(1)将这些值代入 f 的表达式,确定线性方程组中的未知系数.

(2)写出表示该方程组的等价矩阵.

(3)该系数矩阵是否可逆?

(4)解该方程组.

(5)写出函数 f,画出 f 及其采样数据.信号是否与采样值合理的近似?

活动 2

你能够提出一个对 n 个采样点进行处理的方式吗? 描述过程.

第五单元

线 性 变 换

在这一单元中,我们研究线性空间之间的关系,从而获得对线性变换及其特性的研究.通过线性变换的核和值域特征化这些特殊的子空间,我们得到方程组 $Ax=b$ 的可解性.同时,线性变换对于不同基的矩阵表示在许多应用中是一个重要问题.

课文 5.1 线性变换介绍

在这一节中,我们将研究线性空间之间映射的表示和性质.我们还将研究在加法和数乘适当的定义下这样的映射集合是否构成一个线性空间.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lintran);
```

何谓线性变换呢?

我们从向量空间几个映射例子开始.

例 1.1 考虑 $\mathbb{R}^2$到 $\mathbb{R}^2$内的映射

```
>T:=(x,y)->(y,x);
```

T 保持加法运算吗? 即 $T(v+u)=T(v)+T(u)$对于 $\mathbb{R}^2$ 中任两个向量 v,u 成立吗?

任取 $\mathbb{R}^2$ 中两个向量

```
>v:=vector([a,b]);   u:=vector([c,d]);
```

计算 T 对 $v+u$ 的作用

```
>'T(v+u)':=[T(a+c,b+d)];
```

和 $T(v)+T(u)$:

```
>'T(v)':=[T(a,b)];   'T(u)':=[T(c,d)];
>'T(v)+T(u)':=evalm(vector([T(a,b)])+vector([T(c,d)]));
```

$T(v+u)=T(v)+T(u)$成立吗? 我们可以从 $T(v+u)=T(v)+T(u)$的计算中清楚地得答案.因此,T 保持加法运算.

T 保持数乘运算吗? 若 k 为实数量,比较 T 对$k*v$ 作用(即 $T(k*v)$)与 $k*T(v)$:

```
>'T(kv)':=[T(k*a,k*b)];   'kT(v)'=evalm(k*[T(a,b)]);
```

$T(k*v)=k*T(v)$成立吗? 这可以 $T(k*v)=k*T(v)$的计算中清楚地得到答案.因此,映射 T 保持数乘运算.

这个例子表明变换 T 保持加法与数乘运算.这样的映射 T 称为线性变换.

例 1.2 考虑 $\mathbb{R}^3$到 $\mathbb{R}^2$的映射 T

```
>T:=(x,y,z)->(x-y,y-z);
```

T 保持加法运算吗？即对于 $\mathbb{R}^3$中任意的两个向量 v 与 u，等式 $T(v+u)=T(v)+T(u)$ 是否成立？任取 $\mathbb{R}^3$中的两个向量

```
>v:=vector([a1,a2,a3]);  u:=vector([b1,b2,b3]);
```

比较 T 对 $v+u$ 的作用与 $T(v)$，$T(u)$之和.

```
>`T(v1+v2)`:=[T(a1+b1,a2+b2,a3+b3)];
>`T(v1)`:=[T(a1,a2,a3)];  `T(v2)`:=[T(b1,b2,b3)];
```

计算

```
>`T(v)+T(u)`:=evalm(vector([T(a1,a2,a3)])+vector([T(b1,b2,b3)]));
```

$T(v+u)=T(v)+T(u)$成立吗？从 $T(v+u)=T(v)+T(u)$的计算中可清楚地获知.因此，变换 T 保持加法运算.

T 保持数乘运算吗？对于任意数量 k，比较 T 对 $k*v$ 的作用(即 $T(k*v)$)与 $k*T(v)$：

```
>T(kv):=[T(k*a1,k*a2,k*a3)];
  kT(v):=evalm(k*[T(a1,a2,a3)]);
```

$T(k*v)=k*T(v)$成立吗？从 $T(k*v)=k*T(v)$的计算中可清楚地获知.因此，变换 T 保持数量乘法.从而 T 是一个线性变换.

例 1.3　矩阵乘法定义了一个线性变换吗？选择一个矩阵及适当的向量

```
>A:=matrix([[1,3],[-2,3]]);  X:=matrix([[x],[y]]);
```

以 A，X 矩阵乘法的方式定义 $\mathbb{R}^2$到 $\mathbb{R}^2$的变换 T

```
>T:=X->multiply(A,X);
>`T(X)`=T(X);
```

取 $\mathbb{R}^2$中的任两个向量 v 和 u：

```
>v:=matrix([[a],[b]]);  u:=matrix([[c],[d]]);
```

确定 T 对$(v+u)$的作用，并与 $T(v)+T(u)$相比较：

```
>`T(v)+T(u)`:=evalm(T(v)+T(u));  `T(v+u)`=T(v+u);
```

T 保持加法运算吗？T 保持数乘运算吗？

```
>`kT(v)`:=evalm(k*T(v));  `T(kv)`:=T(evalm(k*v));
```

T 保持数量乘法运算.因此，矩阵乘法是线性变换的一个例子.

让我们考虑另一类型的变换.

例 1.4　考虑 $\mathbb{R}^2$上的变换

```
>T:=(x,y)->(x-y,y^2);
```

T 保持加法和数乘运算吗？任取 $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量

```
>v:=vector([a,b]);  u:=vector([c,d]);
```

$T(v+u)=T(v)+T(u)$成立吗？

```
> `T(v+u)`:=[T(a+c,b+d)];
> `T(v)+T(u)`:=evalm(vector([T(a,b)])+vector([T(c,d)]));
```

比较 $T(v+u)$与 $T(v)+T(u)$.它们相等吗？

此例中，变换 T 不保持加法.这样的变换是一个非线性变换.

小结

线性变换 T 是一个向量空间 V 到另一向量空间 W 内的一个映射,如满足下列两个条件:

- T 是线性的(T 保持加法):
  对于 V 中任两个向量 v_1,v_2,有 $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.
- T 是齐次的(T 保持数乘):
  对于 V 中任意的 v 和任意数量 k,有 $T(k*v)=k*T(v)$.

图形表示

例 1.5 设 T 是矩阵定义的变换

```
>A:=matrix([[1,0],[0,-1]]);
```

应用这个变换到直线 $y=x+1$ 所确定的点集上

```
>S:={}:for i to 60 do t:=(i-1)/60:
  S:=S union{[t,t+1]}:od:
>BaseGeometry (A,S);
```

例 1.6 设 T 是矩阵定义的一个变换

```
>A:=matrix([[0,1],[1,0]]);
```

应用这个变换到 $y=x^2$ 所确定的点集上

```
>S:={}:for i to 20 do t:=(i-1)/20:
  S:=S union{[t,t^2]}:od:
>Base Geometry (A,S);
```

学习过程

使用函数 lineartran 学会判别一个变换为线性所需的步骤.一个例子:

例 1.7 考虑 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个变换

```
>T:=x->(x[1],x[2],0);
>lineartran(T,R2,R3);
```

自己选择变换,重复这个过程直到掌握该方法.

线性变换的一些特性

线性空间 V 到线性空间 W 所有的线性变换集组成一个线性空间吗?

例 1.8 定义 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 两个线性变换

```
>T1:=x->(x[1]-x[2],x[2]-x[3]);   T2:=x->(x[2],x[1]+x[3]);
```

$T(x)=(T_1+T_2)(x)=T_1(x)+T_2(x)$定义为两个变换之和

```
>T:=x->(x[1],x[1]+x[2]);
```

T 是一个线性变换吗? 利用 lineartran 函数的无步骤程式检验

```
>lineartran(T,R3,R2);
```

两个线性变换之和是线性的.

一个线性变换的数乘是线性变换吗？定义变换 $T=k*T_1$ 为 $(k*T_1)(x)=k*T_1(x)$：

```
>T:=x->(k*x[1]-k*x[2],k*x[2]-k*x[3]);
```

$k*T_1$ 是线性变换吗？（如果想使用 lineartran，可以选择不同的 k 值；如 $k=1$，$k=2$，$k=-2$，$\cdots$.）

从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的所有线性变换的集合组成一个线性空间.（事实 5.1）

线性变换中零向量的象是什么呢？

例 1.9 考虑变换

```
>T:=x->(x[1]+x[2],x[2],1);
```

T 是一个线性变换吗？

```
>lineartran(T,R2,R3);
```

在此变换下 $\mathbb{R}^2$ 的零向量的象是什么？

```
>`T[0,0]`:=[T(vector([0,0]))];
```

此例表明，在该变换的作用下零向量的象不为零. T 是线性的吗？

例 1.10 考虑线性变换

```
>T:=(x,y,z)->(x+y,y,y-z,z);
```

零向量[0,0,0]的象为

```
>`T[0,0,0]`:=[T(0,0,0)];
```

若 T 为线性变换，则零向量的象为零.（事实 5.2）

上述的逆是否成立呢？即若零向量的象是零向量，变换是线性的吗？（事实 5.2）

若 T 是向量空间 V 到向量空间 W 内的线性变换，且 $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是 V 的一组基. 象集 $=\{T(v_1),T(v_2),\cdots,T(v_n)\}$ 总是 W 的子空间的一组基吗？

例 1.11 考虑线性变换

```
>T:=(x,y,z)->(x+y,y,z);
```

选择 $\mathbb{R}^3$ 中 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 组成的基：

```
>v1:=vector([1,-1,3]);  v2:=vector([0,1,1]);
  v3:=vector([-3,1,0]);
```

基的每个向量的象为

```
>w1:=vector([T(1,-1,3)]);  w2:=vector([T(0,1,1)]);
  w3:=vector([T(-3,1,0)]);
```

向量集 $\{w_1,w_2,w_3\}$ 组成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基还是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间的基？将 w_1,w_2,w_3 作为行向量构造矩阵，检验向量集 $\{w_1,w_2,w_3\}$ 是否是线性独立，并应用 rref 获得简化的梯形阵

```
>A:=matrix([[0,-1,3],[1,1,1],[2,1,0]]);
>rref(A);
```

集合 $\{w_1,w_2,w_3\}$ 线性独立吗？简化的梯形阵表明这些向量是线性独立的. 因此，集合

$\{w_1,w_2,w_3\}$组成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基. 由此可知,在此例中, $\mathbb{R}^3$ 基集$\{v_1,v_2,v_3\}$的象集$\{w_1,w_2,w_3\}$是 $\mathbb{R}^3$的一组基.

例 1.12 考虑 $\mathbb{R}^4$ 上的线性变换

```
>T:=(x1,x2,x3,x4)->(x2+x1,x2,x3+x4,x4);
```

选择$\mathbb{R}^4$ 的一组基

```
>v1:=vector([1,-1,3,0]);  v2:=vector([-1,0,1,1]);
 v3:=vector([-3,1,0,0]);  v4:=vector([0,0,0,1]);
```

基向量的象为

```
>w1:=vector([T(1,-1,3,0)]);  w2:=vector([T(-1,0,1,1)]);
 w3:=vector([T(-3,1,0,0)]);  w4:=vector([T(0,0,0,1)]);
```

向量集合$\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基吗? 将其作为矩阵的行向量构造矩阵,并应用 gausselim 或 rref

```
>A:=matrix([[0,-1,3,0],[-1,0,2,1],[-2,1,0,0],[0,0,1,17]]);
>rref(A);
```

rref(A)说明了集合$\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$什么? 这个集是线性独立的,并且是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

若 $T:V\to W$ 是线性空间 V 与 W 间的线性变换,B 是 V 的一组基,则 B 中元素的象是 W 子空间的一组基.(事实 5.4)

线性变换的其它例子

以下是在微积分中使用的两个线性变换例子.

第一个变换是定义在闭区间$[a,b]$上连续函数空间(该空间用 $C[a,b]$来表示)上,空间的元素是连续函数.根据微积分,我们知道集 $C[a,b]$在加法$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$和数乘运算$(kf)(x)=kf(x)$下是封闭的.

例 1.13 定义变换

```
>T:=f->Int(f,x=a..b);
```

此变换在 $C[a,b]$中保持加法与数乘运算吗? 首先检验加法:

```
>'T(f+g)':=T(f+g);  'T(f)+T(g)':=T(f)+T(g);
```

然后检验数乘

```
>'T(k*f)':=T(k*f);  'k*T(f)':=k*T(f);
```

在比较加法和数乘运算后,我们得到什么结论? 由积分所定义的变换是一个线性变换.

第二个变换是定义在所有可微函数空间(用 $C'[a,b]$表示)上的,该空间的元素是可微函数.同样,根据微积分,我们知道此集合在加法和数乘运算下是封闭的.

例 1.14 定义变换

```
>T:=f->D(f);
```

此变换在 $C'[a,b]$中保持加法和数乘运算吗? 首先检验加法:

```
>'T(f+g)':=T(f+g);  'T(f)+T(g)':=T(f)+T(g);
```

然后检验数乘:

```
>'T(k*f)':=T(k*f);  'k*T(f)':=k*T(f);
```

在比较了加法和数乘运算后,我们得到什么结论? 用微分定义的变换是线性变换.

练　习

在以下练习中，可能需要用到自动函数 lineartran 和 Maple 命令 matrix，vector，solve，evalm，gausselim 及 rref.

1.考虑映射

```
>T:=(x,y,z)->(x,1,1);
```

说明 T 不是一个线性变换的实例.

2.考虑映射

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2],0);
```

判别 T 是一个线性变换，可以使用 lineartran 的交互程式.

3.设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是由矩阵定义的线性变换：

```
>A:=theta->matrix([[cos(theta),-sin(theta)],
                  [sin(theta),cos(theta)]]);
```

用几何方式描述变换 T 在向量

```
>v:=vector([1,2]);
```

上的作用，并取以下值

```
>theta:=0, pi/3, pi/4, pi/2, 2*pi/3, pi;
```

4.设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是如下给出的线性变换

```
>T:=(x,y,z)->(x-y,y+z,2*x-y+z);
```

$S=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

```
>v1:=vector([1,1,0]);  v2:=vector([-1,0,1]);
 v3:=vector([0,0,1]);
```

(1)说明对于 $\mathbb{R}^3$ 中每个元 u，$T(u)$ 是向量 $T(v_i)$，$i=1,2,3$ 的线性组合(使用 $T(v_1)=[T(1,1,0)]$ 计算 $T(v_1)$).

(2)集合 $\{T(u_1),T(u_2),T(u_3)\}$ 张成 $\mathbb{R}^3$ 吗？为什么.

5.设 $T_1:U\to V$，$T_2:V\to U$ 为两个线性变换.说明如下定义的合成

$$T_1\circ T_2:\ (T_1\circ T_2)(v) = T_1(T_2(v))$$

是一个线性变换.(事实 5.3)

课文 5.2 线性变换的核和值域

与线性变换相关联的两个重要子空间就是核与值域.在特征化线性变换和形如 $Ax=b$ 的算子方程解集方面,这两个子空间是基本的.

回想一下,一个非齐次线性方程组 $Ax=b$ 是相容的,当且仅当 $\mathrm{rank}(A\mid b)=\mathrm{rank}(A)$.则通解记成

$$x = x_h + x_p$$

其中,x_h 是对应齐次方程组$Ax=0$的解,x_p 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的特解. x_h 属于集 $\{x \mid Ax=0\}$.当 b 属于A 的列向量空间时,特解 x_p 存在.前一个集合定义了线性变换的核;后一个集合表征了线性变换的值域.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lintran);
```

核和值域的定义

例 2.1 给定矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,-1],[0,1,1],[1,4,0]]);
>x:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
```

用矩阵乘法定义线性变换 T

```
>T:=x->multiply(A,x);
```

寻找所有使得 $T(x)=0$ 的向量 x

```
>T(x)=evalm(matrix([[0],[0],[0]]));
```

构造增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,3,-1,0],[0,1,1,0],[1,4,0,0]]);
```

并应用 Gauss 消元法

```
>AUG1:=gausselim(AUG);
```

方程组相容吗? 方程组是相容的,且其解

```
>solution:=backsub(AUG1);
```

因此，满足 $T(x)=0$ 的向量 x 集是方程组 $Ax=0$ 的解. 该集中的每个向量是 $[4,-1,1]$ 的倍式.

现在寻找所有向量 y

```
>y:=matrix([[a],[b],[c]]);
```

使得存在向量 x，有 $T(x)=y$.

```
>T(x)=evalm(y);
```

构造增广矩阵

```
>AUG:=matrix([[1,3,-1,a],[0,1,1,b],[1,4,0,c]]);
```

并应用 Gauss 消元法

```
>AUG1:=gausselim(AUG);
```

方程组是相容的，则向量 $y=[a,b,c]$ 的分量必定满足关系 $a+b=c$. 从而，对于集合 $\{[a,b,c],a+b=c\}$ 中的任一向量 y，存在 x 使得 $T(x)=y$. 在此情形下，增广矩阵简化为

```
>AUG1:=matrix([[1,3,-1,a],[0,1,1,b],[0,0,0,0]]);
```

且方程组的解为

```
>solution:=backsub(AUG1);
```

通解可以写成

$$
\begin{aligned}
x &= [4t_3-3b+a,\ -t_3+b,t_3] \\
&= [4t_3,\ -t_3,t_3]+[-3b+a,b,0] \\
&= x_h+x_p
\end{aligned}
$$

其中，$x_h=[4t_3,-t_3,t_3]$ 为对应齐次方程组 $Ax=0$ 的解，而 $x_p=[-3b+a,b,0]$ 是 $Ax=y$ 的特解.

该例的第一部分表征了线性变换的核，第二部分与确定线性变换的值域相关联.

例 2.2 设 T 是由矩阵乘法所定义的 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换.

```
>A:=matrix([[1,3,-1],[1,0,1],[0,1,2]]);
  x:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
>T:=x->multiply(A,x);
```

寻找所有的向量 b

```
>b:=matrix([[b1],[b2],[b3]]);
```

使得存在一个向量 x，有 $T(x)=b$.

```
>T(x)=evalm(b);
```

正如例 2.1，构造增广矩阵并应用 Gauss 消元法

```
>AUG:=matrix([[1,3,-1,b1],[1,0,1,b2],[0,1,2,b3]]);
>AUG1:=gausselim(AUG);
```

此方程组是相容的，且对于 $\mathbb{R}^3$ 中任一向量 b 有唯一解. 在此情形下，方程组的解由 $x=x_h+x_p$ 所给出. 其中 $x_h=[0,0,0]$ 为对应齐次方程 $Ax=0$ 的解. $Ax=b$ 的特解 x_p 为

```
>xp:=backsub(AUG1);
```

设 $T: V \to W$ 是两向量空间 V 与 W 之间的线性变换. T 的核(用 ker(T)表示)是 V 中所有满足 $T(v)=0$ 的 v 的集合;即 $\ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}$. ker($T$)的维数(nullity($T$))为 ker($T$)基的元素个数. T **的核 ker(T)是 V 的子空间**.(事实 5.5a)

T 的值域(用 range(T)表示)为 W 中所有这样的向量 w 构成的集合:V 中存在一向量 v 有 $T(v)=w$. 即 $\text{range}(T)=\{w\in W \mid 存在\ v\in V, T(v)=W\}$. range($T$)的维数或 rank($T$)是 range($T$)基的元素个数. T **的值域 range(T)是 W 的子空间**.(事实 5.5b)

学习过程

使用 kernel 和 range 的论证程式,学会怎样构造这两个集合.有一个例子.

例 2.3　设 T 为 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换.

```
>T:=x->(x[1],x[2]-x[3]);
>kernel(T,R3,R2);
```

你能够估计出变换的值域是什么吗?

```
>range(T,R3,R2);
```

重复使用你所选的变换,直到掌握了怎样构造一个线性变换的核与值域.

核和值域的一些性质

例 2.4　考虑 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换

```
>T:=x->(x[1],x[3]-x[2]);
>kernel(T,R3,R2);
```

你能估计出此变换的值域是什么吗?

```
>range(T,R3,R2);
```

在此例中,变换 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 具有

$$\text{nullity}(T)=1, \quad \text{rank}(T)=2.$$

比较nullity(T)+rank(T)与域 $\mathbb{R}^3$ 的维数.

例 2.5　考虑线性变换 $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[3]-x[4],0);
```

使用 kernel 的无步骤程式

```
>kernel(T,R4,R3);
```

你能估计出此变换的值域吗? 使用 range 的无步骤程式.

```
>range(T,R4,R3);
```

在此例中,变换 $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 具有

$$\text{nullity}(T)=2, \quad \text{rank}(T)=2.$$

同样地,比较nullity(T)+rank(T)与域$\mathbb{R}^4$ 的维数.

维数定理　假定 V 是一个 n 维线性空间. 若 T 是 V 到 W 内的线性变换, 则

$$\text{nullity}(T)+\text{rank}(T)=n.$$ (事实 5.6)

例2.6　考虑 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$

```
>T:=x->(x[1]-x[3],x[2]-x[4],x[3],x[4]);
```

使用 kernel 的无步骤程式

```
>kernel(T,R4,R4);
```

此例中, $\ker(T)=\{0\}$, 所以 $\text{nullity}(T)=0$. 根据核的信息, 你能确定变换的值域吗? 维数定理给我们提供了根据核计算出值的一个方法. $\text{rank}(T)=4$, 因此, T 的值域为$\mathbb{R}^4$.

例2.7　考虑线性变换 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$:

```
>T:=x->(x[1]-x[4],x[2]-x[3],x[3]-x[5],x[4],x[5]);
```

使用 kernel 的无步骤程式

```
>kernel(T,R5,R5);
```

正如前一例子, $\ker(T)=\{0\}$, 从而 $\text{rank}(T)=5$. 描述 T 的值域, T 的值域为 $\mathbb{R}^5$. 什么样的变换其核是平凡子空间$\{0\}$?

一个变换是 1-1 的, 当且仅当它的核是零向量.

练　习

在以下习题中, 可能用到自动函数 lineartron, kernel, range 和 Maple 命令 matrix, vector, solve, evalm, gausselim 及 rref.

1. 设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是由矩阵乘法所给出的线性变换, 其矩阵为

```
>A:=matrix([[2,-1],[-8,4]]);
```

(1)描述线性变换在 $\mathbb{R}^2$ 任一向量上的作用.

(2)向量

```
>v:=vector([1,2]);
```

属于 $\ker(T)$吗?

(3)向量

```
>u:=vector([1,-4]);
```

属于 $\text{range}(T)$吗?

2. 考虑线性变换

```
>T:=(x,y,z)->(x,y,0);
```

(1)这个变换表示什么几何意义?

(2)描述该变换的核.

(3)描述该变换的值域.

3. 考虑线性方程组

```
>eq1:=x1-x2+2*x3-x4=11;
>eq2:=2*x1+3*x2-x3+x4=15;
>eq3:=5*x1+5*x3-2*x4=a;
```

(1)写出增广矩阵 AUG 和方程组的系数矩阵 A.

(2)描述矩阵 AUG 的行空间. 它依赖于 a 的值吗?

(3)描述矩阵 A 的行空间,它依赖于 a 的值吗?

(4)描述矩阵 AUG 的列空间,它依赖于 a 的值吗?

(5)描述利用矩阵 A,按矩阵乘法给出的线性变换 T.

(6)描述 $\ker(T)$,它与 A 的行空间有怎样的关系?

(7)描述 $\text{range}(T)$. 向量

```
>v:=vector([11,15,a]);
```

对于任意的 A 属于 $\text{range}(T)$吗? 它与 AUG 的列空间有怎样的关系?

4. 描述所有其核为$\mathbb{R}^n$ 空间的变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

5. 设 $T:U\to V$ 是一线性变换,则下列说法是等价的(事实 5.7 和 5.8):

(1)$\ker(T)=\{0\}$. (2)T 是 1-1 的. (3)T 存在逆.

课 文 5.3

线性变换的矩阵表示

一个 $m\times n$ 矩阵是指具有 m 行 n 列的阵列.我们将要表明矩阵就是一个线性空间到另一线性空间的线性变换.是否存在所有 $m\times n$ 矩阵集合与所有$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 线性变换组成集合之间的 1－1 对应呢?

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lintran);
```

线性变换的矩阵表示

例 3.1 设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是由如下方式给出的线性变换

```
>T:=(x,y)->(2*x,x+y,3*y);
```

寻找关于$\mathbb{R}^2$ 和$\mathbb{R}^3$ 标准基的 T 的矩阵表示.

1.找出 T 在$\mathbb{R}^2$ 标准基上的作用

```
> 'T(1,0)':=vector([T(1,0)]);  'T(0,1)':=vector([T(0,1)]);
```

2.将每个结果向量写成 $\mathbb{R}^3$ 标准基的线性组合.

```
> 'T(0,1)':=2*evalm([1,0,0])+1*evalm([0,1,0])+'0'*evalm([0,0,1]);
> 'T(0,1)':='0'*evalm([1,0,0])+1*evalm([0,1,0])+3*evalm([0,0,1]);
```

3.向量 $T(1,0)$关于标准基的坐标为 2,1 和 0.向量 $T(0,1)$关于标准基的坐标为 0,1 和 3.将向量 $T(1,0)$和 $T(0,1)$的坐标作为列构造矩阵:

```
>A:=matrix([[2,0],[1,1],[0,3]]);
```

这样,3×2 矩阵 A 就是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 变换 T 的矩阵表示.为了检验该矩阵表示了关于标准基的变换 T,我们用向量

```
>v:=matrix([[x],[y]]);
```

乘矩阵 A

```
>A1:=multiply(A,v);
```

此结果与变换 T 的定义是一致的.

例 3.2 设 T: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 是如下给出的线性变换:

```
>T:=(x1,x2,x3,x4)->(x1,x2+x1,x3+x4);
```

T 关于 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{R}^3$ 标准基的矩阵表示是什么?

1.求 T 对$\mathbb{R}^4$ 标准基的作用:

```
>w1:=vector([T(1,0,0,0)]);  w2:=vector([T(0,1,0,0)]);
 w3:=vector([T(0,0,1,0)]);  w4:=vector([T(0,0,0,1)]);
```

2.将 w_1,w_2,w_3 和 w_4 写成$\mathbb{R}^3$ 标准基的线性组合

```
>w1:=1*evalm([1,0,0])+1*evalm([0,1,0])+'0'*evalm([0,0,1])
>w2:='0'*evalm([1,0,0])+1*evalm([0,1,0])+'0'*evalm([0,0,1])
>w3:='0'*evalm([1,0,0])+'0'*evalm([0,1,0])+1*evalm([0,0,1])
>w4:='0'*evalm([1,0,0])+'0'*evalm([0,1,0])+1*evalm([0,0,1])
```

3. w_i 关于 $\mathbb{R}^3$ 标准基的坐标作为列向量构造矩阵

```
>A:=matrix([[1,0,0,0],[1,1,0,0],[0,0,1,1]]);
```

因此,表示$\mathbb{R}^4$ 到$\mathbb{R}^3$ 变换 T 的矩阵是 3×4 矩阵 A.判别 3×4 矩阵 A 表示 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 关于标准基的变换.

一个线性变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 可以表成 $m\times n$ 矩阵,其矩阵的列为向量 $w_i=T(e_i)$关于$\mathbb{R}^m$ 和$\mathbb{R}^n$ 标准基的坐标.(事实 5.9)

一般说来,若 V,W 是两个维数分别为n 和m 的有限维线性空间,则存在 V 到W 所有线性变换组成的集合到所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合之间的一一对应.

学习过程

使用 matrixrep 的示范模式,学习寻找线性变换矩阵表示的处理方法.有几个例子

例 3.3 设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是如下给出的线性变换:

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2]+x[3],x[3]);
>matrixrep(T,R3,R3);
```

例 3.4 寻找线性变换 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 的矩阵表示

```
>T:=x->(x[1]-x[2]-x[3],x[2]+x[4],x[4]-2*x[3]);
>matrixrep(T,R4,R3);
```

反复使用你所选的变换,直到掌握寻找矩阵表示的处理方法.

可逆变换

例 3.5 设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是如下给出的线性变换

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2]-x[3],x[3]-2*x[2]);
```

使用无步骤程式获得 T 的矩阵表示

```
>matrixrep(T,R3,R3);
```

则表示 T 的 3×3 的矩阵为

```
>A:=matrix([[1,-1,0],[0,1,-1],[0,-2,1]]);
```

A 是非退化矩阵吗?

```
>invA:=inverse(A);
```

这个变换的核是什么？使用无步骤程式来计算核

```
>kernel(T,R3,R3);
```

具有核为{0}的变换 T 是一一变换的一个例子.这样的变换 T 的逆存在,怎样获得 T 的逆呢？选择$\mathbb{R}^3$ 中任一向量 v,并找出 A 的逆与 v 的乘积

```
>v:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);   invT:=multiply(invA,v);
```

这样,变换 T 的逆为

```
>T1:=x->(x[1]-x[2]-x[3],-x[2]-x[3],-2*x[2]-x[3]);
```

若 T 是一个$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性变换,则 $\ker(T)=\{0\}$

- 当且仅当 T 是一一变换.
- 当且仅当 T 的逆存在.
- 当且仅当 T 矩阵表示是非退化的.
- 当且仅当对应线性方程的齐次方程组 $Ax=0$ 只有平凡解.
- 当且仅当对应线性方程的非齐方程组 $Ax=b$ 有唯一解.

微积分例子

例 3.6 设 P_1 为次数小于等于 1,基为$\{1,x\}$的所有多项式组成的集合;P_2 为次数小于等于 2,基为$\{1,x,x^2\}$的所有多项式组成的集合.定义 $T:P_2 \to P_1$ 为

```
>T:=x->(a-2*b)*x+4*c;
```

T 关于给定基的矩阵表示是什么？正如向量情形,计算 P_2 基的每个元素象.如计算 x^2 的象,可通过取 $a=1,b=0$ 和 $c=0$.这样,P_2 的基就转变成 $x^2=ax^2+bx+c$,其中

```
>a:=1;b:=0;c:=0;'T(x^2)':=T(x);
```

$x=ax^2+bx+c$,其中

```
>a:=0;b=1;c:=0;'T(x)':=T(x);
```

$1=ax^2+bx+c$,其中

```
>a:=0;b:=0;c:=1;'T(1)':=T(x);
```

现在,我们用 P_1 的基来表示象 $x,-2x$ 和 4.

```
>x=1*x+'0'*'.1';   -2*X=-2*x+'0'*'.1';
  4='0'*x+4*'.1';
```

这样,表示变换 $T:P_1 \to P_2$ 的 2×3 矩阵为

```
>A:=matrix([[1,-2,0],[0,0,4]]);
```

多项式 $2x^2-3x+8$ 的象是什么？

练　习

在以下习题中,可能需要用到自动函数 lineartran,kernel 和 range,matrixrep 及 Maple命令 matrix,vector,solve,evalm,gausselim,rref.

1.考虑线性变换

```
>T:=(x1,x2,x3)->(x2-x1,0,x3-x1);
```

(1)找出 T 关于标准基的矩阵表示.使用 matrixrep 的交互程式.

(2)求 rank(T)和 nullity(T).

(3)变换 T 是一一变换吗?若是,找出 T 的逆.

2.设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为一变换

```
>T:=(x1,x2,x3)->(x1+x2,2*x1-2*x2,2*x1-x2+x3);
```

(1)找出变换 T 的矩阵表示.

(2)求 nullity(T).

(3)该变换可逆吗?若是,求其逆.

3.设 T 是定义在多项式次数小于等于 2,基为$\{1,x,x^2\}$所有多项式集合 P_2 上的线性变换.定义 $T:P_2\to P_2$ 为 $T(ax^2+bx+c)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax^2+bx+c)$,其中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是关于$x$ 的导数.

(1)求 T 关于P_2 所给基的矩阵表示.

(2)多项式 $Tx^2+13x-8$ 的象是什么?

4.考虑线性变换 $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 和 $T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$:

```
>T1:=(x1,x2,x3)->(x1-x2,x2-x3);
 T2:=(x1,x2)->(x1+x2,x2,x2-x1);
```

(1)求 T_1,T_2 的矩阵表示 A_1,A_2.

(2)若有定义,求合成 $T_1\circ T_2,T_2\circ T_1$ 的矩阵表示.

课文 5.4 基变换

在课文 5.3 中，我们描述了关于基础线性空间标准基的线性变换矩阵表示. 我们怎样获得关于非标准基的变换矩阵表示呢? 我们怎样将非标准基转为标准基及标准基转为非标准基呢?

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lintran);
```

非标准基的矩阵表示

例 4.1 考虑向量

```
>v:=vector([5,4]);
```

选择$\mathbb{R}^2$两组不同基:标准基 $E=\{e_1,e_2\}$

```
>e1:=vector([1,0]);  e2:=vector([0,1]);
```

和非标准基 $B=\{u_1,u_2\}$

```
>u1:=vector([3,2]);  u2:=vector([1,1]);
```

关于标准基 E，向量 $v=[5,4]$很容易被表示为:

```
>[5,4]=5*evalm(e1)+4*evalm(e2);
```

对于基 B，它能容易被表示吗? 即，通过观察，你能够找到 c_1 和 c_2 使得

```
>[5,4]=c1*evalm(u1)+c2*evalm(u2);
```

为了确定 c_1 和 c_2，将 v 用基 B 表示可写成方程组. 相对应的方程组为

```
>eq1:=3*c1+c2=5;  eq2:=2*c1+c2=4;
```

解方程组，得 c_1 和 c_2

```
>solve({eq1,eq2},{c1,c2});
```

这样，向量 $v=[5,4]$关于基 B 为

```
>[5,4]=1*evalm(u1)+2*evalm(u2);
```

$c_1=1,c_2=2$ 称为向量 v 关于基B 的坐标.

相同的处理过程可以按矩阵的形式来描述. 将基 B 的向量作为列构造矩阵:

```
>S:=matrix([[3,1],[2,1]]);
```

利用矩阵方程求得向量 v 关于基B 的坐标

```
>c:=matrix([[c1],[c2]]);   v:=matrix([[5],[4]]);
>evalm(S)*evalm(c)=evalm(v);
```

矩阵 S 的逆存在吗？为什么？既然 S 是非退化的矩阵，向量 c 关于基B 的坐标可通过矩阵 S 的逆与 v 的积获得

```
>c:=multiply(inverse(s),v);
```

例 4.2 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的向量

```
>v:=vector([1,-5,6]);
```

选择 $\mathbb{R}^3$ 两组不同基：标准基 $E=\{e_1,e_2,e_3\}$：

```
>e1:=vector([1,0,0]);   e2:=vector([0,1,0]);
  e3:=vector([0,0,1]);
```

和基 $B=\{u_1,u_2,u_3\}$：

```
>u1:=vector([1,3,2]);   u2:=vector([1,1,0]);
  u3:=vector([0,-1,3]);
```

对于标准基 E，向量 $v=[1,-5,6]$可以表为

```
>[1,-5,6]=1*evalm(e1)+(-5)*evalm(e2)+6*evalm(e3);
```

你能够求出 c_1,c_2 和 c_3，使得 $v=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$ 吗？

```
>[1,-5,6]=c1*evalm(u1)+c2*evalm(u2)+c3*evalm(u3);
```

为了求 c_1,c_2 和 c_3，构造对应的方程组

```
>eq1:=c1+c2=1;   eq2:=3*c1+c2-c3=-5;
  eq3:=2*c1+3*c3=6;
```

通过解方程组，获得 c_1,c_2 和 c_3：

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{c1,c2,c3});
```

向量 $v=[1,-5,6]$关于基 B 可表为

```
>[1,-5,6]=(-3/2)*evalm(u1)+(5/2)*evalm(u2)+3*evalm*(u3);
```

c_1,c_2,c_3 称为向量 v 关于基B 的坐标.

通过将基的向量作为列构造矩阵. 我们可以获得同样的结果.

```
>S:=matrix([[1,1,0],[3,1,-1],[2,0,3]]);
```

此计算与写成矩阵方程 $v=S*c$ 是等价的，其中 c 是关于基B 的 v 的坐标向量，其中 v 是给定的向量. 通过矩阵 S 的逆与 v 相乘获得解：

```
>c:=multiply(inverse(S),v);
```

从而，v 可写成：

```
>evalm(v)=(-3/2)*evalm(u1)+(5/2)*evalm(u2)+3*evalm(u3);
```

将向量表为非标准基 B 包含如下步骤.

1. 将基集 B 的向量作为列构造矩阵 S. 此称为基 B 到标准基 E 的转移矩阵.

2. 构造 S 的逆.

3. 用给定向量乘 S 的逆. 求出关于基 B 的坐标.

通常，将向量 v 关于基 $B_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$的坐标转为关于基 $B_2=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$的

坐标：

1. **构造基 B_1 到标准基 E 的转移矩阵 S_1，$B_1 \to S_1 \to E$.**
2. **构造基 B_2 到标准基 E 的转移矩阵 S_2，$B_2 \to S_2 \to E$.**
3. **通过 S_2 的逆乘 S_1 构造基 B_1 到基 B_2 的转移矩阵.**（事实 5.10 和 5.11）

例 4.3　求从基 $B_1=\{v_1,v_2\}$到基 $B_2=\{u_1,u_2\}$变换的转移矩阵.

```
>v1:=vector([5,2]);   v2:=vector([7,3]);
 u1:=vector([3,2]);   u2:=vector([1,1]);
```

基 B_1 到 E 的转移矩阵为

```
>S1:=matrix([[5,7],[2,3]]);
```

基 B_2 到 E 的转移矩阵为

```
>S2:=matrix([[3,1],[2,1]]);
```

则 B_1 到 B_2 的转移矩阵为

```
>S:=multiply(inverse(S2),S1);
```

现在，若 v 为关于标准基E 的向量[74,31]

```
>v:=vector([74,31]);
```

则关于基 B_1 的坐标为

```
>x:=multiply(inverse(S1),v);
```

向量 x 关于基B_2 为

```
>y:=multiply(S,x)
```

若 S_1，S_2 分别为基 B_1 到 E，B_2 到 E 的转移矩阵，则 $S=S_2^{-1}S_1$ 为 B_1 到 B_2 的转移矩阵.（事实 5.12）

基变换的几何表示

例 4.4　考虑如下产生的半园弧

```
>A:={ }:n:=100: for i to n do
  t:=(i-1)/n;A:=A union{[t,sqrt(1-t^2)]};od;
```

考虑标准基 E 和基$B=\{[1,1],[1,-1]\}$. B 到E 的转移矩阵为

```
>S:=matrix([[1,1],[1,-1]]);
```

显示关于这些基的象

```
>BaseGeometry(S,A);
```

例 4.5　考虑如下产生的曲线

```
>A:={ }:n:=200: for i to n do
>t:=(i-1)/n;A:=A union {[t,t^2]};od;
```

考虑标准基 E 和基$B=\{[1,0],[0,-1]\}$. B 到E 的转移矩阵为

```
>S:=matrix([[1,0],[0,-1]]);
```

显示关于这些基的象

```
>BaseGeometry(S,A);
```

学习过程

使用 Changebasis 的论证程式,学会对于不同的基表示一个变换的处理方法,有一个例子.

例 4.6 考虑如下所给出的$\mathbb{R}^2$ 的基 $G=\{v_1,v_2\}$和 $H=\{u_1,u_2\}$

```
>v1:=vector([1,1]);    v2:=vector([1,-1]);
>u1:=vector([-1,1]);   u2:=vector([1,1]);
```

用给定的基作为列向量构造矩阵

```
>G:=matrix([[1,1],[1,-1]]);   H=matrix([[-1,1],[1,1]]);
```

求基 G 到基 H 的转移矩阵和基 H 到基 G 的转移矩阵

```
>Changebasis(G,H);
```

反复使用你所选的基,直到掌握了基变换的处理方法.

练 习

在以下习题中可能使用到自动函数 lineartran,kernel,range,changebasis 和 Maple 命令 matrix,vector,solve,evalm,gausselim 及 rref.

1. 设 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 为线性变换

```
>T:=(x1,x2,x3,x4)->(x1+x2+x3,x2+x3,x3+x4);
```

(1)写出 T 关于$\mathbb{R}^4$ 和$\mathbb{R}^3$ 标准基下的矩阵表示.

(2)设 $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$为$\mathbb{R}^4$ 的一组基,其值如下

```
>u1:=vector([1,1,0,0]);    u2:=vector([0,1,-1,0]);
>u3:=vector([0,1,0,-1]);   u4:=vector([-1,0,0,1]);
```

及如下所给$\mathbb{R}^3$ 的基 $B_1=\{v_1,v_2,v_3\}$

```
>v1:=vector([1,1,0]);   v2:=vector([2,0,3]);
>v3:=vector([0,0,1]);
```

求 T 关于$\mathbb{R}^4$ 的基 B 和$\mathbb{R}^3$ 的基 B_1 的矩阵表示.利用此矩阵求向量[3,6,-9,15]的象.

2. 设 $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$为如下给出的$\mathbb{R}^4$ 的基

```
>u1:=vector([1,1,0,1]);    u2:=vector([0,1,-1,0]);
>u3:=vector([0,1,0,-1]);   u4:=vector([-1,0,0,1]);
```

(1)求$\mathbb{R}^4$ 的标准基到基 B 的转移矩阵.

设 $B_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$是$\mathbb{R}^4$ 如下所给的另一组基

```
>v1:=vector([1,1,1,1]);    v2:=vector([1,1,-1,0]);
>v3:=vector([0,1,1,-1]);   v4:=vector([-1,0,0,1]);
```

(2)求$\mathbb{R}^4$ 的标准基到 B_1 的转移矩阵.

(3)求基 B 到基 B_1 的转移矩阵.

课文 5.5 相似性

在这一部分,我们将分析线性变换关于不同基矩阵表示的含义.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lintran);
```

相似性

例 5.1 考虑线性变换 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

```
>T:=x->(x[1]+x[2],x[1]-x[2]);
```

设 $E=\{e_1,e_2\}$为$\mathbb{R}^2$ 的标准基

```
>e1:=vector([1,0]);   e2:=vector([0,1]);
```

使用 matrixrep 的无步骤程式来显示 T 关于此基的矩阵表示

```
>matrixrep(T,R2,R2);
```

关于标准基 E 的矩阵表示 T_E 为

```
>T(E):=matrix([[1,1],[1,-1]]);
```

设 $B=\{u_1,u_2\}$为$\mathbb{R}^2$ 的另一基

```
>u1:=vector([1,2]);   u2:=vector([2,1]);
```

利用 matrixrep 的无步骤程式来显示 T 关于此基的矩阵表示

```
>matrixrep(T,R2,R2);
```

关于基 B 的矩阵表示 T_B 为

```
>T(B):=matrix([[-5/3,-1/3],[7/3,5/3]]);
```

T_E 与 T_B 之间有什么关系呢? B 到E 的转移矩阵为

```
>S:=matrix([[1,2],[2,1]]);
```

计算 $S^{-1}T_ES$ 的积

```
>'inv(S).T(E).S':=multiply(inverse(S),multiply(T(E),S));
```

$S^{-1}T_ES$ 与T_B 有什么关系呢? 矩阵 $S^{-1}T_ES$ 等于T_B.其中 T_E 是关于标准基的矩阵表示,T_B 是关于非标准基B 的矩阵表示.

例 5.2 考虑线性变换 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

```
>T:=x->(x[1]+x[3],x[1]-x[2]+x[3],x[2]+x[3]);
```

设 $E=\{e_1,e_2,e_3\}$是$\mathbb{R}^3$ 的标准基.

```
>e1:=vector([1,0,0]);  e2:=vector([0,1,0]);
  e3:=vector([0,0,1]);
```

使用 matrixrep 的无步骤程式来显示 T 关于此基的矩阵表示

```
>matrixrep(T,R3,R3);
```

关于标准基的矩阵表示 T_E 为

```
>T(E):=matrix([[1,0,1],[1,-1,1],[0,1,1]]);
```

设 $B=\{u_1,u_2,u_3\}$为$\mathbb{R}^3$ 的另一组基

```
>u1:=vector([1,1,2]);  u2:=vector([2,1,0]);
  u3:=vector([0,1,1]);
```

使用 matrixrep 函数的无步骤程式直接原型来显示关于此基的矩阵表示 T_B

```
>matrixrep(T,R3,R3);
```

关于基 B 的矩阵表示 T_B 为

```
>T(B):=matrix([[5/3,2/3,5/3],[2/3,2/3,-1/3],[-1/3,-1/3,-4/3]]);
```

矩阵 T_E 与 T_B 的关系是什么? B 到 E 的转移矩阵为

```
>S:=matrix([[1,2,0],[1,1,1],[2,0,1]]);
```

计算 $S^{-1}T_ES$ 的积

```
>`inv(S).T(E).S`:=multiply(inverse(S),multiply(T(E),S));
```

$S^{-1}T_ES$ 与 T_B 的关系是什么? 矩阵 $S^{-1}T_ES$ 等于 T_B. 其中 T_E 是关于标准基的矩阵表示, T_B 是关于非标准基 B 的矩阵表示.

设 $B_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $B_2=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为线性空间 V 的两组基,且 T 是 V 到 V 的线性变换. 若 S 是基 B_2 到 B_1 的转移矩阵. T_{B_1}是 T 关于基 B_1 的矩阵表示,则矩阵 $T_{B_2}=S^{-1}T_{B_1}S$是 T 关于基B_2 的矩阵表示. 即所谓矩阵 T_{B_2}与 T_{B_1}是相似的.

通常,认为两个矩阵是相似的,若存在非退化矩阵 S 使得$B=S^{-1}AS$. (事实 5.12)

学习过程

使用函数 matrixrep 确定一个变换关于不同基的矩阵表示. 有一个例子.

例 5.3 考虑$\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 T

```
>T:=x->(x[1]+x[3],x[1]-x[2]+x[3],x[2]+x[3]);
```

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个基 $G=\{v_1,v_2,v_3\}$

```
>v1:=vector([1,1,0]);  v2:=vector([0,1,1]);
  v3:=vector([0,0,1]);
```

和 $H=\{u_1,u_2,u_3\}$

```
>u1:=vector([1,1,4]);     u2:=vector([3,1,1]);
  u3:=vector([-1,0,0]);
```

求 T 关于基G 和H 的矩阵表示

```
>matrixrep(T,R3,R3);
```

反复你所选的例子,直至掌握矩阵表示.

练 习

在以下习题中,可能使用到函数 lineartran,kernel,range,matrixrep,changebasis 和 Maple 命令 matrix,vector,solve,evalm,gausselim 及 rref.

1.确定下列两矩阵是否相似

```
>A:=matrix([[1,0,0],[0,-1,0],[0,0,-1]]);
 B:=matrix([[-1,0,0],[0,-1,0],[0,0,1]]);
```

2.设 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 为一线性变换

```
>T:=x->(x[1]+x[2]+x[3],x[2]+x[3],x[3]+x[4]);
```

(1)设 $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$为如下给定的$\mathbb{R}^4$ 的基

```
>u1:=vector([1,1,0,0]);        u2:=vector([0,1,-1,0]);
 u3:=vector([0,-1,0,-1]);      u4:=vector([-1,0,0,1]);
```

求 T 关于基B 的矩阵表示A.

(2)设 $B_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$为如下所给的$\mathbb{R}^4$ 的另一组基

```
>v1:=vector([1,1,1,1]);      v2:=vector([1,1,-1,0]);
 v3:=vector([0,1,1,-1]);     v4:=vector([-1,0,0,1]);
```

求 T 关于基B_1 的矩阵表示 A_1.

(3)两矩阵 A,A_1 相似吗? A 的幂与A_1 的幂相似吗?

指导实验 5.1

线性变换的核与值域

目 的

此实验的目的是学习线性变换核与值域的性质及在线性方程组中的重要性.

自动 Linalg 函数

在此实验中,你将使用自动函数 lineartran,matrixrep,kernel,range 及 changbasis. 为了获得一个函数的信息,在 Maple 提示符>? 后键入函数名;如>? kernel;

指 导

1. 执行一条语句可使用鼠标或键盘移动光标到此行,然后按回车键.
2. 当执行一个函数时,如果需要请创建 Maple 输入区.否则其输出不可能在希望地方出现.
3. 执行以下命令以加载软件包

```
>with(linalg);with(lintran);
```

作业 1

此作业的目标是判别一个给定的变换是否是线性的.

活动 1

给定变换 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[3]-x[2],x[1]-x[3]);
```

T 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换吗? 使用 lineartran 的交互程式:

```
>lineartran(T,R3,R3);
```

活动 2

设 T 为 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的变换

```
>T:=x->(x[1],x[2],x[3],x[2]^2,);
```

T 是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性变换吗? 使用 lineartran 的交互程式.

活动 3

一个变换是线性变换必需满足什么条件.

作业 2

此作业的目标是理解并确定线性变换的核和值域. 设 T 是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性变换

```
>T:=x->(x[1]-2*x[2],x[2]-x[3],x[3]-x[2],x[2]-x[3]);
```

活动 1

提出关于 $T(x)=0$ 的线性方程组.

活动 2

解所产生的齐次线性方程组. 解集合表示什么含义?

活动 3

对该解集确定一组基. 它的维数是多少? rank(T)是多少? 你能描述 range(T)吗?

作业 3

设 T 为 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性变换. 假设 $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ 有标准基. T 在 $\mathbb{R}^3$ 标准基上的作用如下

```
>T(e1):=vector([1,1,1,-1]);   T(e2):=vector([0,1,0,-2]);
  T(e3):=vector([5,7,1,3]);
```

活动 1

给出 T 的一般描述, 即对于 $\mathbb{R}^3$ 中任一向量 $x=[x_1,x_2,x_3]$, 求 $T(x)$.

活动 2

T 的核是什么? 若愿意, 可使用核函数的交互程式. nullity(T)是多少?

活动 3

描述 T 的值域, rank(T)是多少?

活动 4

使用此作业的有关信息, 你能够描述相容的非齐次线性方程组吗?

额外实验题

设 A 为如下所给的 4×5 矩阵

```
>A:=matrix([[1,-1,0,2,3],[2,0,1,-2,4],
           [-3,4,1,0,5],[0,3,2,0,12]]);
```

及

```
>x:=matrix([[x[1]],[x[2]]],[x[3]],[x[4]],[x[5]])
```

设 T 是由矩阵乘法所给出的 $\mathbb{R}^5$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性变换

```
>T:=x->multiply(A,x);
```

1. 确定 T 的核, T 的核与矩阵 A 的行向量空间有怎样的联系? 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解揭示了核的什么信息?

2. 确定 T 的值域, T 的值域与矩阵 A 的列向量空间有怎样的关系? 对应的非齐次方程 $Ax=b$ 的解揭示了值域的什么信息?

指导实验 5.2 线性变换的矩阵表示

目 的

该实验的目的是关于给定基寻找线性变换的矩阵表示.不同基的矩阵表示和相似矩阵.

自动 Linalg 函数

在此实验中,你将使用自动函数 lineartran, matrixrep, kernel, range 及 changebasis.需要得到某函数的信息,在 Maple 提示符>? 后输入函数名;如>? kernel.

指 导

1. 执行一条语句可使用鼠标或键盘将光标移动到该行,并按回车键.
2. 当执行一个函数,若需要,创建 Maple 输入区域,否则在希望的位置输出结果不出现.
3. 执行以下命令以加载软件包

```
>with(linalg);with(lintran);
```

作业 1

此作业的目的是获得线性变换关于标准基的矩阵表示.设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是线性变换

```
>T:=x->(x[1]+x[2],x[2]-2*x[1],x[1]+3*x[2]);
```

活动 1

T 对基 $E_1=\{[1,0],[0,1]\}$ 的作用是什么?

活动 2

依 $\mathbb{R}^3$ 基 $E_2=\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$ 表示活动 1 的向量.

活动 3

写出变换 T 关于 $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ 标准基的矩阵表示.

活动 4

用自己的语言,描述获得线性变换关于标准基矩阵表示的处理方法.

活动 5

使用 matrixrep 的交互程式，获得变换矩阵表示

```
>T:=x->(x[1]+x[2],x[2]-2*x[1],x[1]+3*x[2]);
```

作业 2

此作业的目的是求线性变换关于基础向量空间非标准基的矩阵表示. 设 T 是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性变换

```
>T:=x->(x[2],x[1],x[3]-x[2],x[1]+x[2]-x[3]);
```

活动 1

T 对 $\mathbb{R}^3$ 基 $B_1=\{[1,0,1],[0,1,1],[-1,1,2]\}$ 的作用是什么?

活动 2

依 $\mathbb{R}^4$ 中基 B_2 表示活动 1 中的结果，其中

$$B_2=\{[1,0,0,1],[1,1,1,0],[1,0,0,0],[1,-1,2,0]\}$$

活动 3

1. 利用活动 2 的结果，给出 T 的矩阵表示.
2. 使用 matrixrep 的交互程式获得如下变换

```
>T:=x->(x[2],x[1],x[3]-x[2],x[1]+x[2]-x[3]);
```

的矩阵表示.

作业 3

此作业的目的是加深理解基变换的概念. 设 $B=\{[1,1,1],[1,2,2],[2,3,4]\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

活动 1

求 $\mathbb{R}^3$ 的标准基到 B 的转移矩阵 S.

活动 2

矩阵 S 的逆表示什么?

活动 3

向量 $v=[3,6,9]$ 关于基 B 的坐标是什么?

活动 4

设 T 为 $\mathbb{R}^3$ 上一线性变换

```
>T:=x->(x[1]+x[2],x[2]-x[1],x[1]+x[2]-x[3]);
```

1. T 关于 $\mathbb{R}^3$ 标准基的矩阵表示是什么?
2. T 关于基 B 的矩阵表示是什么?
3. 设 $B_1=\{[1,1,0],[-1,0,1],[0,0,1]\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的另一组基，怎样获得关于 B_1 的矩阵表示?

4. T 关于基 B、B_1 的两个矩阵表示相似吗?

额外实验题

设 A、B 是两个矩阵

```
>A:=matrix([[4,1,-1],[-2,5,2],[4,-4,1]]);
 B:=matrix([[3,3,1],[-1,-1,-1],[1,10,6]]);
```

1. 存在 3×3 非退化矩阵 P,满足 $AP=PB$ 吗?

考虑矩阵

```
>C:=matrix([[3,1,0],[-1,3,1],[1,1,2]]);
```

2. 存在 3×3 非退化矩阵 P,满足 $BP=PC$ 吗?

3. 比较 B、C 的行列式,如果相等,你能说出为什么吗?

4. 通常,相似矩阵的行列式有什么关系?

5. B^n 的幂与 C^n 的幂相似吗? 用 $n=2,3,4$ 进行实验. 你能得一般性结论吗? 证明你的结论.

应 用 5.1 平衡化学反应

目 的

此应用的目的是使用线性变换及不同情形的特性.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(lintran);
```

化学反应 1

考虑一化学反应:氨(N_2H_4)与四氧化二氮(N_2O_4)结合形成氮气(N_2)和水(H_2O)

$$N_2H_4 + N_2O_4 \longrightarrow N_2 + H_2O$$

一个问题是平衡化学反应的左、右边,即两边各元素原子数目相同.

活动 1

写出平衡两边的线性方程组.阐明每个变量代表的含义.

活动 2

描述方程组所表示的线性变换.

活动 3

此变换的核是什么?

活动 4

利用核的信息,你能平衡化学反应吗?写出平衡的化学反应.

化学反应 2

紧急情况下产生氧气(O_2)的氧气罩包含超氧化钾(KO_2).在空气下,它与二氧化碳、水(H_2O)按如下反应式反应产生氧气:

$$KO_2 + H_2O + CO_2 \longrightarrow KHCO_3 + O_2$$

活动 1

写出平衡两边的线性方程组.阐明每个变量代表什么.

活动 2

描述方程组表示的线性变换.

活动 3

线性变换的核是什么?

活动 4

利用核的信息,你能够平衡化学反应式吗?写出平衡的化学反应.

应用 5.2 管理科学:仓库问题

目 的

管理科学应用是处理产品从仓库到商店的分配问题.

初始化软件包

```
>with(linalg);with(lintran);
```

仓库问题说明

一产品公司租了两个仓库.公司在仓库为 W_1,W_2 可分别存储 16 t 和 12 t 产品.公司按规则向两个主要商店 S_1,S_2 发送商品,设商店 S_1 和 S_2 分别能存储 A t 和 b t.

活动 1

写出从每个仓库发送给各商店产品量的线性方程组 $Ax=B$.要求存储在仓库的总量必须发送到商店.

活动 2

依变换的方式 $T(x)=Ax$,描述活动 1 的方程组.判定变换的元素 x 和 A.解释 $T(x)=B$ 的含义.

活动 3

确定变换 T 的核.

活动 4

活动 3 揭示了矩阵 B 值什么含义? 如 $\mathbb{R}^4$ 中每个 B 存在解吗? 若不是,找出 A 和 b 的值,使得方程 $T(x)=B$ 是相容的.明确陈述:为获得相容性,A 和 b 应满足的条件.

活动 5

利用活动 4 中 A,b 的值,描述问题 $T(x)=B$ 可行的整数解.

活动 6

运输一吨产品到各个商店的费用为

	S_1	S_2
W_1	80	45
W_2	60	55

写出从仓库到两个商店运输费用函数 C.

活动 7

求出一个解使费用最低.

第六单元

特征空间

数学、工程、物理以及别的学科中的许多问题可以考虑为形如 $Ax = \lambda x$ 的特征值问题.想法是要找这个方程组关于数量 λ 的非零解 x.在刻画函数的整体极值以及在研究二次型时,我们将用到特征值的问题.

课文 6.1 特征值与特征向量

找矩阵方程 $Ax=\lambda x$ 的非零解 x 这种问题出现在工程及物理科学的许多问题的表述中.描述弹簧振动的微分方程 $y''(t)=-\lambda y$ 就是一个这样的例子,其中 y 表示离开平衡点的位移,λ 是弹簧常数,A 是一个二阶线性微分算子.这叫做**特征值问题**.非零向量 x 称为对应于**特征值** λ 的**特征向量**.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lineign);
```

什么是特征值与特征向量?

例 1.1 设 A 是一个 3×3 矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[0,2,1],[0,0,3]]);
```

x 是一个向量

```
>x:=matrix([[x1],[x2],[x3]]);
```

而 Id 是 3×3 单位矩阵

```
>Id:=diag(1,1,1);
```

特征值问题化为找所有的 λ 及对应的非零向量 x,满足如下方程

```
>evalm(A)*evalm(x)=lambda*evalm(x);
```

这个等价于解矩阵方程

```
>(evalm(A)-lambda*evalm(Id))*evalm(x)=matrix([[0],[0],[0]]);
>S:=evalm((A-lambda*Id)*(x))=matrix([0],[0],[0]);
```

得到方程组

```
>eq1:=(1-lambda)*x1+x2+x3=0; eq2:=(2-lambda)*x2+x3=0;
  eq3:=(-3+lambda)*x3=0;
```

这个齐次方程组何时有非平凡解?回忆起一个齐次方程组有非平凡解当且仅当系数矩阵的行列式等于零.即系数矩阵

```
>A1:=evalm(A-lambda*Id);
```

必须有非零行列式

```
>del(A1)=0;
```

得到的方程称为 A 的特征多项式(Maple 命令是 charpoly(A,lambda);).特征多项式的解集是

```
>s:={solve(det(A1)=0,lambda)};
```

这个解集中的元素是 A 的特征值

```
>lambda1:=s[1];  lambda2:=s[2];  lambda3:=s[3];
```

如何计算特征向量,即与每个特征值相关的非零向量?为了计算特征向量,我们置换矩阵方程 S 中的特征值.与特征值 1 相关的特征向量是如下方程组的解

```
>E1:=subs(lambda=s[1],S);
```

方程组 E_1 导出 $x_2=x_3=0$ 而 x_1 任意.对应于特征值 1 的一个特征向量是

```
>evector1:=vector([1,0,0]);
```

与特征值 2 相关的特征向量是如下方程组的解

```
>E2:=subs(lambda=s[2],S);
```

方程组 E_2 导出 $x_3=0$ 及 $x_1=x_2$.这样,对应于特征值 2 的一个特征向量是

```
>evector2:=vector([1,1,0]);
```

与特征值 3 相关的特征向量是如下方程组的解

```
>E3=subs(lambda=s[3],S);
```

方程组 E_3 导出 $x_1=x_2=x_3$.这样,对应于特征值 3 的一个特征向量是

```
>evector3:=vector([1,1,1]);
```

矩阵 A 有三个不同的特征值及三个线性无关的特征向量.

例 1.2 我们来考虑另一个4×4矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1,1],[0,2,0,0],[1,0,3,1],[0,0,0,1]]);
```

及单位矩阵

```
>Id:=diag(1,1,1,1);
```

和向量 x

```
>x:=matrix([[x1],[x2],[x3],[x4]]);
```

我们要找到所有的 λ 及对应的非零向量 x,满足如下方程

```
>evalm(A)*evalm(x)=lambda*evalm(x);
```

这等价于解矩阵方程

```
>(evalm(A)-lambda*evalm(Id))*evalm(x)=matrix([[0],[0],[0],[0]]);
```

或

```
>S:=evalm((A-lambda*Id)*(x))=matrix([[0],[0],[0],[0]]);
```

这个齐次方程组何时有非平凡解?假如系数矩阵

```
>A1:=evalm(A-evalm(lambda*Id));
```

的行列式为 0,

```
>det(A1)=0;
```

则此矩阵方程有非零解 x.我们求解 A 的特征多项式得到特征值.解集是

```
>s:={solve(det(A1)=0,lambda)};
```

特征值是

```
>lambda1:=s[1]; lambda2:=s[2]; lambda3:=s[3]; lambda4:=s[4];
```

为了得到与特征值 1 相关的特征向量,我们解方程组

```
>E1:=subs(lambda=1,S);
```

得到 $x_1=x_4, x_2=0, x_3=-x_4$,而 x_4 任意.这样,对应于特征值 1 的一个特征向量是

```
>ev1:=vector([1,0,-1,1]);
```

为了得到与特征值 2 相关的特征向量,我们解方程组

```
>E2:=subs(lambda=2,S);
```

得到 $x_1=-x_3, x_2=-2x_3, x_4=0$,而 x_3 任意.这样,对应于特征值 2 的一个特征向量是

```
>ev2:=vector([-1,-2,1,0]);
```

为了得到与特征值 $2+\sqrt{2}$ 相关的特征向量,我们解方程组

```
>E3:=subs(lambda=2+sqrt(2),S);
```

得到 $x_1=(-1+\sqrt{2})x_3, x_2=0, x_4=0$,而 x_3 任意.这样,对应于特征值 $2+\sqrt{2}$ 的一个特征向量是

```
ev3:=vector([-1+sqrt(2),0,1,0]);
```

为了得到与特征值 $2-\sqrt{2}$ 相关的特征向量,我们解方程组

```
>E4:=subs(lambda=2-sqrt(2),S);
```

得到 $x_1=(1-\sqrt{2})x_3, x_2=0, x_4=0$,而 x_3 任意.这样,对应于特征值 $2-\sqrt{2}$ 的一个特征向量是

```
ev4:=vector([-1-sqrt(2),0,1,0]);
```

一样地,矩阵 A 有四个不同的特征值及四个线性无关的特征向量.

小结

λ 是 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值

- 当且仅当 $(A-\lambda*\mathrm{Id})*x=0$ 有非平凡解;
- 当且仅当 $A-\lambda*\mathrm{Id}$ 是奇异矩阵;
- 当且仅当 $\det(A-\lambda*\mathrm{Id})$ 等于 0.

对应每个特征值 λ,我们有一个特征空间 E_λ.这个空间由与此特征值相关的线性无关的特征向量生成的向量组成.(事实 6.1)

在例 1.1 中,对于矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[0,2,1],[0,0,3]]);
```

与特征值 1 相关的特征空间 E_1 由所有形如 $[x_1,0,0]$ 的向量组成,其中 x_1 是任意的数量.由特征向量 $[1,0,0]$ 组成的集合是特征空间 E_1 的一个基.

对于特征值 2,特征空间 E_2 由所有形如 $[x_1,x_1,0]$ 的向量组成,其中 x_1 是任意的数量.由特征向量 $[1,1,0]$ 组成的集合是这个特征空间的一个基.

对于特征值 3,相关的特征空间 E_3 由所有形如 $[x_1,x_1,x_1]$ 的向量组成,其中 x_1 是任意的数量.由特征向量 $[1,1,1]$ 组成的集合是这个特征空间的一个基.

学习过程

利用 eigenvals 及 eigenvects 的论证程式学习得到一个给定矩阵的特征值与特征向量的程序.从如下矩阵开始:

```
>A:=matrix([[-2,0,1],[-6,-2,0],[0,0,3]]);  eigenvals(A);
```

使用函数 eigenvects(A)计算特征向量.

```
>eigenvect(A);
```

重复使用你自己的矩阵直到掌握这一程序.

特征值与特征向量的某些性质

例 1.3　考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1,1],[0,2,1,4],[0,0,3,8],[0,0,0,6]]);
```

特征值的和与矩阵 A 的对角元素的和之间有什么关系? 利用函数 eigenvals(A)的无步骤程式,

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 的特征值是 1,2,3 及 6.特征值的和是 12.把这个值与矩阵 A 的对角元素的和进行比较

```
>A[1,1]+A[2,2]+A[3,3]+A[4,4];
```

例 1.4　考虑另一矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3,4],[4,1,2,3],[3,4,1,2],[2,3,4,1]]);
```

利用函数的无步骤程式

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 的特征值是 10, -2, -2+2*I 及 -2-2*I(I=$\sqrt{-1}$).特征值之和为 4.把它与矩阵 A 的对角元素之和进行比较

```
>A[1,1]+A[2,2]+A[3,3]+A[4,4];
```

一个矩阵 A 的特征值之和等于 A 的迹,而一个矩阵的迹是它的对角元素之和.

例 1.5　考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]);
```

矩阵 A 的行列式与它的特征值的乘积之间是什么关系?

使用无步骤程式计算

```
>eigenvals(A),
```

特征值是 0,0 与 3.它们的乘积为 0.这个矩阵的行列式是多少? 因为矩阵 A 的两行是一样的,所以 A 的行列式为 0.

考虑另一矩阵

```
>A:=matrix([[2,-1,2,3],[0,1,2,4],[3,1,9,1],[0,0,0,1]]);
```

使用无步骤程式计算

```
>eigenvals(A);
```

特征值是 $1,2,5+2\sqrt{6},5-2\sqrt{6}$.特征值的乘积为 2.而矩阵 A 的行列式是

```
>det(A);
```

一个矩阵 A 的特征值的乘积等于这个矩阵的行列式.

练　习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 eigenvals 与 eigenvects,以及 Maple 命令 solve,matrix,vector,gausselim,rref 与 charpoly.

1. 考虑矩阵:

```
>A=matrix([[-15,16,32],[-4,5,8],[-4,4,9]]);
```

利用函数 eigenvals 与 eigenvects 的交互程式得到矩阵 A 的特征值与特征向量.

2. 决定与如下矩阵的每个特征值相关的特征空间

```
>A:=matrix([[5,0,1],[1,1,0],[-7,1,0]]);
```

3. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,0],[-1,2]]);
```

(1) 如下定义矩阵 A 的特征多项式

```
>p:=lambda->expand(charpoly(A,lambda));
```

证明矩阵 A 满足 $p(A)=0$.

(2) 用下面矩阵重做(1)

```
>A:=matrix([[1,-1,1],[0,1,2],[0,1,-1]]);
```

(3) 关于矩阵 A 与它的特征多项式,可否提出一个一般的论断?

4.(1)给出如下 3 阶循环矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,1,2],[2,3,1]]);
```

只用矩阵乘法,证明向量

```
>v:=vector([1,1,1]);
```

是一个对应特征值 6 的特征向量.利用 eigenvects 验证你的答案.

(2) 给出如下 4 阶循环矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3,4],[4,1,2,3],[3,4,1,2],[2,3,4,1]]);
```

只用矩阵乘法,证明向量

```
>v:=vector([1,1,1,1]);
```

是一个对应特征值 10 的特征向量.利用 eigenvects 验证你的答案.

(3) 给出 5 阶循环矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,3,4,5],[5,1,2,3,4],[4,5,1,2,3],[3,4,5,1,2],[2,3,4,5,1]]),
```

只用矩阵乘法,证明向量[1,1,1,1,1]是一个对应于特征值 15 的特征向量.

(4) 如果 A 是 $n\times n$ 循环矩阵,向量$[1,1,1,\cdots,1]$是否是特征向量? 与它对应的特征值是什么? 验证你的断言.

5. 矩阵 A 的特征值是 -1,0 与 1,对应的特征和分别是 x_0,x_1 与 x_2.找方程组 $Ax=x_0+x_2$ 的解 x.方程组 $Ax=x_1$ 有解否? 验证你的回答.

6. 投资者想开三个不同的帐目 A_1,A_2 与 A_3,投入一样的资金.帐目产生的年利率分别是 6%,8% 与 10%.每年结束时,投资者的政策是把在 A_2 中赚到的钱的三分之一与在 A_3 中赚到的钱的三分之二投到 A_1 中,把在 A_3 中赚到的钱的三分之一投到 A_2 中.

(1) 写出表示 n 年后投入到每个帐目的资金数目的方程组.

(2) 写出方程组的矩阵表示.

(3) 用投入到每个帐目的最初的资金数目表示第 n 年在每个帐目中的资金数目.(提示:计算系数矩阵中的特征值与特征向量.)

(4) 利用(3)的结果,估计在 A_1 中产生双倍的数目的年数.

课文 6.2 矩阵的对角化

如果 D 是一个给定的 $n\times n$ 对角矩阵而 b 是 $n\times 1$ 矩阵，那么易解关于未知 $n\times 1$ 向量 x 的矩阵方程 $Dx=b$. 假设我们有兴趣于解矩阵方程 $Ax=b$. 如果矩阵 A 相似于一个对角矩阵 D(即，有非奇异矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=D$)，那么 $Ax=b$ 能够变为 $Dy=P^{-1}b$，其中 $y=P^{-1}x$，而这是容易解的. 于是 x 由 $x=Py$ 确定. 这样，我们有兴趣于问题：何时一个给定的 $n\times n$ 矩阵 A 相似于一个对角矩阵?

初始化软件包

```
with(linalg):with(lineign);
```

对角化过程

例 2.1 设 A 是 3×3 矩阵

```
>A:=matrix([[0,1,-1],[1,0,1],[1,-1,-4]]);
```

矩阵 A 的特征值是(使用无步骤程式)

```
>eigenvals(A);
```

对应的特征向量是

```
>eigenvects(A);
```

特征向量是

```
>v1:=vector([1,1,0]); v2:=vector([-1,1,-1]); v3:=vector([-1,1-2]);
```

构造列是矩阵 A 的特征向量 v_1,v_2 与 v_3 的矩阵

```
>P:=transpose(matrix([v1,v2,v3]));
```

因为 3×3 矩阵 A 有三个线性无关的特征向量，我们能够构造列是特征向量的矩阵 P. 矩阵 P 是否是非奇异的?

```
>det(P);
```

如果我们执行矩阵乘法：$P^{-1}AP$，会有什么结果?

```
>P^('-1')*A*P=multiply(inverse(P),multiply(A,P));
```

在这种情形下，A 相似于一对角矩阵. 这一过程称为**对角化过程**.

学习过程

利用 diagonalize 的论证程式学习对角化一个矩阵的过程.记得如果特征多项式的根不“好”时,那么输出看起来可能就不那么“引人入胜”.

例 2.2 矩阵 A 是否相似于对角矩阵?

```
>A:=matrix([[1,2,0,6],[-1,1,2,0],[3,4,1,2],[2,1,0,0]]);
>diagonalize(A);
```

因为 4×4 矩阵 A 有四个线性无关的特征向量,我们可以构造列为特征向量的矩阵 P.这时,矩阵 A 相似于对角矩阵.

重复使用你自己的矩阵以学会这一对角化过程.

对角化条件

如果一个矩阵 A 的特征值不是互异的,我们还能对角化它吗?

例 2.3 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[3,-1,-2],[2,0,-2],[2,-1,-1]]);
```

矩阵 A 可对角化吗? 首先找 A 有多少不同的特征值

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 有两个不同的特征值.相应的特征向量是什么?

```
>eigenvects(A);
```

在这个例子中,对应于特征值 0 的特征向量是:

```
>v1:=vector([1,1,1]);
```

对应于特征值 1 的特征向量是

```
>v2:=vector([1,2,0]);  v3:=vector([0,-2,1]);
```

A 可对角化吗? 选择无步骤程式看看 A 是否可对角化:

```
>diagonalize(A);
```

尽管只有两个特征值,但有三个线性无关的特征向量.特征值 1 重复了两次,我们称它的代数重数为 2.因为对应于这个特征值有两个特征向量,我们称它的几何重数为 2.这样,我们可以构造列为矩阵 A 的特征向量 v_1,v_2 及 v_3 的矩阵:

```
>P:=transpose(matrix([v1,v2,v3]));
```

P 是非奇异矩阵吗?

```
>det(P);
```

执行矩阵乘法 $P^{-1}AP$.

```
>P^('-1')*A*P=multiply(inverse(P),multiply(A,P));
```

在这个例子中,矩阵 A 相似于对角矩阵.

如果一个特征值的代数重数不等于它的几何重数,会如何呢? 我们仍可以对角化矩阵 A 吗?

例 2.4 考虑 3×3 矩阵

```
>A:=matrix([[1,0,0],[0,2,0],[3,0,1]]);
```

A 可对角化吗? 利用函数 diagonalize 的无步骤程式

```
>diagonalize(A);
```

找出矩阵 A 的线性无关特征向量的数目

```
>eigenvects(A);
```

只有两个线性无关的特征向量.一个是

```
>v1:=vector(0,1,0);
```

而另一个是对应于代数重数为 2 的特征值 1 的特征向量

```
>v2:=vector([0,0,1]);
```

我们能构造一个 3×3 矩阵 P 使得$P^{-1}AP$ 是对角矩阵吗?要做到这一点,我们需要三个线性无关的特征向量来组成矩阵 P 的列,而现在我们只有两个.在这个例子中,矩阵 A 不是可对角化的,矩阵 A 称为**瑕矩阵**.

如果存在非奇异矩阵 P 使得乘积$P^{-1}AP$ 是对角矩阵,则 $n\times n$ 矩阵A 是可对角化的.

一个特征值的代数重数是特征多项式的根重复的次数;它的几何重数是对应于这个特征值的特征空间的维数.设 A 是$n\times n$ 矩阵.如果 A 有n 个不同的特征值,则 A 有n 个线性无关的特征向量并且A 是可对角化的.特征向量是用作对角化的矩阵 P 的列.矩阵 P 除了它的列的次序外是唯一的.(事实 6.3)

设 A 是$n\times n$ 矩阵.A 可对角化当且仅当A 有n 个线性无关的特征向量.(事实 6.4)

应　用

指数矩阵

微分方程$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y'(t)=ay(t)$是一个模拟生灭问题的典型方程.例如,如果 $y(t)$是时刻 t 时的细菌总数并且如果细菌的变化率与时刻t 时的总数成比例,那么微分方程就模拟了这种现象,其中 a 是比例常数.解是 $y(t)=ce^{at}$且c 是可以由初始条件$y(0)$确定的任意常数.

回忆起指数函数 e^{at}是由展开式给出的

```
>exp(a*t):=Sum((a*t)^i/i!, i=0..infinity);
```

因为这个函数是包括指数生灭问题在内的许多重要问题的解,一个自然问题的是问在这种情形下当参数 a 用一个矩阵A 来替换时是否有一个等价的展开?如果是这样的话,怎么来计算这个表达式?

结果将是必需的,如果我们把数量方程换为矩阵方程 $Y'(t)=AY(t)$,其中$Y(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)]$,并且解导出方程组.该方程组的解是 $Y(t)=e^{At}Y(0)$,其中$Y(0)$是初始条件.为了对矩阵有类似的指数函数.

```
>exp(A*t):=Sum*((A*t)^i/i!,i=0..infinity);
```

我们必须对不同类的矩阵 A 计算它的幂.

对角矩阵

设 A 是2×2 单位矩阵

```
>A:=diag(1,1);
```

因为 A 的所有幂都等于 A

```
>exp(A*t):=evalm(A)* Sum((t)^i/i!,i=0..infinity);
```

这等价于

```
>exp(A*t):=evalm((A)* Sum(t^i/i!,i=0..infinity));
```

现在设 A 是 2×2 对角矩阵

```
>A:=diag(2,3)
```

因为 A 是对角矩阵,它的幂容易计算.特别地,对矩阵 A,有

```
>A^2=evalm(A^2);  A^3=evalm(A^3);  A^4=evalm(A^4);
```

一般地

```
>A^i=matrix([[2^i,0],[0,3^i]]);
```

因此

```
>exp(A*t):=Sum(matrix([[2^i,0],[0,3^i]])*t^i/i!, i=0..infinity);
```

即

```
>exp(A*t):=Sum(matrix([[(2*t)^i/i!,0],[0,(3*t)^i/i!]]),
                       i=0..infinity);
```

或

```
>exp(A*t):=matrix([[Sum((2*t)^i/i!, i=0..infinity),0],
                   [0,Sum((3*t)^i/i!, i=0..infinity)]]);
```

当和的值求出后,我们得到了 e^{At} 的矩阵表示

```
>exp(A*t):=matrix([[Sum((2*t)^i/i!, i=0..infinity),0],
                   [0,Sum((3*t)^i/i!,i=0..infinity)]]);
```

可对角化矩阵

现在考虑 2×2 矩阵

```
>A:=matrix([[3,4],[3,2]]);
```

矩阵 A 的特征值是 6 与 −1,而对应的特征向量是

```
>v1:=vector([4,3]);  v2:=vector([1,-1]);
```

这样,矩阵 A 相似于对角矩阵,其中

```
>p:=matrix([[4,1],[3,-1]]);  D1:=diag(6,-1);
 evalm(A)=evalm(p)*evalm(D1)*evalm(inverse(p));
```

让我们利用 A 可对角化的事实来计算 A 的各种幂

```
>A^2=evalm(A^2);
 P*D1^2*P^('-1')=multiply(P,multiply(D1^2,inverse(P)));
>A^3=evalm(A^3);
 P*D1^3*P^('-1')=multiply(P,multiply(D1^3,inverse(P)));
>A^4=evalm(A^4);
 P*D1^4*P^('-1')=multiply(P,multiply(D1^4,inverse(P)));
```

于是

```
>A^n=P*D1^n*P^('-1');
```

进而,矩阵 D_1 的指数为

```
>exp(D1*t):=diag(exp(6*t),exp(-t));
```

这样

```
>exp(A*t):=evalm(P&*exp(D1*t)&*inverse(P));
```

为了得到可对角化矩阵 A 的指数,程序如下:

1. 计算给定矩阵的特征值与特征向量.
2. 构造列为特征向量的矩阵 P,进而形成乘积 $A=PD_1P^{-1}$,其中 D_1 是对角元为 A 的特征值的对角矩阵.
3. 构造指数矩阵 e^{D_1t}.
4. 给定矩阵的指数为 $Pe^{D_1t}P^{-1}$.

初值问题

解初值问题

```
>A:=matrix([[3,2],[0,4]]); Y:=matix([[y1],[y2]]);
>evalm((d/dt)*Y)=evalm(A)*evalm(Y);
```

带有初始数据 $Y(0)$:

```
>Y0:=matrix([[1],[2]]);
```

1. 计算 A 的特征值(利用无步骤程式)

```
>eigenvals(A);
```

2. 计算矩阵 A 的特征向量(利用无步骤程式)

```
>eigenvects(A);
```

对应于特征值 3 的特征向量是向量[1,0],而对应于特征值 4 的特征向量是向量[2,1].

3. 构造矩阵 P 及对角矩阵 D_1

```
>P:=matrix([[1,2],[0,1]]);  D1:=diag(3,4);
```

4. 构造 D_1 的指数

```
>exp(D1*t):=diag(exp(3*t),exp(4*t));
```

A 的指数矩阵是

```
>exp(A*t):=evalm(P&*exp(D1*t)&*inverse(P));
```

因此,初值问题的解是

```
>Y:=evalm(exp(A*t)&*Y0);
```

练　习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 eigenvals,eigenvects 及 diagonalize 与

Maple 命令 solve,matrix,vector,gausselim,rref 及 charpoly.

1. 你能找到一个对角矩阵 D_1 相似于矩阵

```
>A:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-2,-1],[0,0,-1,-2]]);
```

吗? 利用函数 diagonalize 的交互程式.

从结果中导出 A 的 10 次幂.

2. 设 T 是线性变换

```
>T:=(x1,x2,x3)->(x1+x2,x2+x3,0);
```

对于$\mathbb{R}^3$ 是否有基 B 使得关于基B 表示 T 的矩阵是对角的? 如果是的话,找出基 B 及对角矩阵表示.

3. 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times n$ 上三角矩阵,其中对角元不同.

(1)A 相似于对角矩阵吗?(**提示**:先用几个例子作实验,进而作出一般的论断.)

(2)设 A 为对角元不同的下三角矩阵,重复(1).

4. 解初值问题

```
>dY/dt=A*Y,
```

初始数据 $Y(0)$及矩阵 A 为

```
>Y0:=matrix([[1],[1],[1]]);
 A:=matrix([[1,1,1],[0,0,-1],[0,0,-1]]);
 Y:=matrix([[y1],[y2],[y3]]);
```

课文 6.3 埃尔米特矩阵

迄今为止我们处理的矩阵的元素都是实数.元素为复数的矩阵会如何呢? 回忆起复数是形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数,其中 a 与 b 是实数,而 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lineign);
```

埃尔米特矩阵的例子

例 3.1 设 A 是矩阵

```
>A:=matrix([[1,2,-I],[2,3,1+2*I],[I,1-2*I,0]]);
```

A 等于它的转置吗?

```
>A^T=transpose(A);
```

如果我们取元素为矩阵 A 的元素的复共轭的矩阵的转置,会如何?

```
>(conjugateA)^T=transpose(matrix([[1,2,I],[2,3,1-2*I],
                                  [-I,1+2*I,0]]));
```

矩阵 A 等于它的共轭.像 A 这样的矩阵称为**埃尔米特矩阵**.这些矩阵是元素为实数的对称矩阵的复类似.

例 3.2 下列矩阵是埃尔米特阵吗?

```
>A:=matrix([[2,2-I],[2+I,4]]);
```

取矩阵 A 的每个元素的共轭

```
conjugate(A):=matrix([[2,2+I],[2-I,4]]);
```

而 conjugate(A)的转置是

```
>transpose(conjugate(A));
```

因为这个矩阵等于矩阵 A,所以 A 是埃尔米特阵.

学习过程

利用函数 hermitian 的论证程式来验证下列矩阵是否是埃尔米特阵.

例 3.3 下列矩阵是埃尔米特阵吗?

```
>A:=matrix([[I,2-I],[2+I,4]]);
>hermitian(A);
```

重复使用你自己的矩阵直到你掌握这一程序.

埃尔米特矩阵的某些性质

例3.4 给出了 2×2 埃尔米特矩阵 A:

```
>A:=matrix([[2,2-I],[2+I,4]]);
```

埃尔米特矩阵 A 的特征值(使用无步骤程式)是什么?

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 的特征值是实数.总是这种情况吗?

埃尔米特矩阵 A 的特征向量(使用无步骤程式)是什么?

```
>eigenvects(A);
```

两个特征向量 ev_1 及 ev_2 是

```
>ev1:=vector([2-I,1-sqrt(6)]);
 ev2:=vector([-(1-sqrt(6)),2+I]);
```

ev_1 与 ev_2 的内积是多少? 为了定义复元向量的内积,取第一个向量与第二个向量的共轭的内积.ev_2 的共轭是

```
>cev2:=vector([-(1-sqrt(6)),2-I]);
```

而特征向量 ev_1 与 cev_2 的内积是

```
>innerprod(ev1,cev2);
```

对应于不同特征值的特征向量是正交的.总是这种情况吗?

例 3.5 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,0,-I],[0,1,1+2*I],[I,1-2*I,0]]);
```

确定 A 的特征值(使用无步骤程式)

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 的特征值是实数.总是这种情形吗? 埃尔米特矩阵 A 的特征向量是什么(使用无步骤程式)?

```
>eigenvects(A);
```

特征向量是

```
>ev1:=vector([-1/2*I,1/2+I,1]);
 ev2:=vector([1/3*I,-1/3-2/3*I,1]);
 ev3:=vector([2+I,1,0]);
```

在计算特征向量的内积之前,取向量的共轭

```
>cev1:=vector([1/2*I,1/2-I,1]);
 cev2:=vector([-1/3*I,-1/3+2/3*I,1]);
 cev3:=vector([2-I,1,0]);
```

取下列内积:

```
>'<ev1,ev2>'=innerprod(ev1,cev2);
```

```
>'<ev1,ev3>'=innerprod(ev1,cev3);
>'<ev2,ev3>'=innerprod(ev2,cev3);
```

再一次,对应于不同特征值的埃尔米特矩阵的特征向量是正交的.

埃尔米特矩阵的特征值是实的.埃尔米特矩阵的特征向量是正交的.(事实6.5)

练 习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 eigenvals, eigenvects, diagonalize 与 hermitian 及 Maple 命令 solve, matrix, vector, gausselim, rref 与 charpoly.

1. 设 A 和 B 是两个埃尔米特矩阵

```
>A:=matrix([[1,-I,0],[I,1,2],[0,2,1]]);
 B:=matrix([[0,1+I,2],[1-I,2,I],[2,-I,3]]);
```

(1) A 与 B 之和是埃尔米特阵吗?

(2) 数量积 $c*A$ 是否是埃尔米特阵? (1)如果 c 为实的? (2)如果 c 为复的?

(3) A 与 B 的乘积是埃尔米特阵吗?

(4) A 的幂是埃尔米特阵吗?

2. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,-I,0],[I,2,0],[0,0,1]]);
```

(1) 找出矩阵 A 的特征值与特征向量.

(2) 构造正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

3. 找出所有的 2×2 及 3×3 埃尔米特阵.列出每种类型几个例子.

课文 6.4

酉矩阵

酉矩阵类是正交矩阵类的复类似.酉矩阵 U 是列形成正交集的复元矩阵.给定埃尔米特矩阵 A,我们能否找到酉矩阵 U 使得$U^{-1}AU=D$,其中 D 为对角矩阵?

初始化软件包

```
>with(linalg);with(lineign);
```

酉矩阵的例子

例 4.1 考虑埃尔米特矩阵

```
>A:=matrix([[2,1-I],[1+I,1]]);
```

找出矩阵 A 的特征值(使用无步骤程式)

```
>eigenvals(A);
```

矩阵 A 的特征值是 0 与 3.

构造特征向量:

```
>eigenvects(A);
```

对应于特征值 0 与 3 的特征向量是

```
>ev1:=vector([1,-1-I]);   ev2:=vector([1,1/2+1/2*I]);
```

现在计算 ev_1 与 ev_2 的共轭

```
>cev1:=vector([1,-1+I]);   cev2:=vector([1,1/2-1/2*I]);
```

特征向量是正交的吗?

```
>'<ev1,ev2>'=innerprod(ev1,cev2);
 '<ev2,ev1>'=innerprod(ev2,cev1);
```

规一化 ev_1 与 ev_2

```
>u1:=evalm((1/sqrt(innerprod(ev1,cev1)))*ev1);
 u2:=evalm((1/sqrt(innerprod(ev2,cev2)))*ev2);
```

矩阵 U

```
>U:=transpose(matrix([u1,u2]));
```

是酉矩阵的例子.它的列形成正交集.

酉矩阵的某些性质

例 4.1 中酉矩阵的逆是什么?

```
>U^('-1')=inverse(U);
```

U 与它的逆的元素之间的关系是什么? 酉矩阵 U 的逆可以通过取 U 的共轭的转置得到.

乘积 $U^{-1}AU$ 是什么?

```
>U^('-1')*A*U=evalm(inverse(U)&*A&*U);
```

简化

```
>evalm(evalm(inverse(U)&*A&*U));
```

乘积产生一个对角矩阵,对角元是埃尔米特矩阵 A 的特征值.

如果埃尔米特矩阵 A 有不同的特征值,则有酉矩阵 U 来对角化 A.(事实 6.6)

练　习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 eigenvals, eigenvects, diagonalize, hermitian 和 Maple 命令 solve, matrix, vector, gausselim, rref 与 charpoly.

1. 设 U 是酉矩阵

```
>U:=matrix([[0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)],[-1,0,0],
            [0,-1/sqtr(2),1/sqrt(2)]]);
```

(1) 酉矩阵 U 的幂是什么?

(2) 证明 U 的特征值的绝对值总是等于 1.

(3) 给定任意两个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 v_1 与 v_2. 证明,关于 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积, Uv_1 与 Uv_2 的内积等于 v_1 与 v_2 的内积.

2. 给定矩阵

```
>A:=matrix([[0,2,-1],[2,3,-2],[-1,-2,0]]);
```

找出对角化 A 的正交矩阵 U.

3. 找出参数 a_1, a_2 与 a_3 的值使得矩阵 U 是酉的,其中

```
>U:=matrix([[a1,sqrt(6)/3,-sqrt(3)/3],[a2,sqrt(6)/6,sqrt(3)/3],
            [a3,sqtr(6)/6,sqtr(3)/3]]);
```

课文 6.5 二次型与正定矩阵

特征值与特征向量的概念自然地导致了二次型与正定矩阵的研究.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lineign);
```

二次型

两个变量 x 与 y 的二次型是

```
>a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f=0;
```

几何上,二次型表示圆锥曲线.回忆起通过对二次方程应用配平方过程,我们可以把它变成标准形,从中我们可以识别圆锥曲线及它的特征(焦点、中心、及轴).圆锥曲线可以基于系数 a,b 及 c 来识别.

- 当 $a=c$ 时,方程表示圆.
- 当 a 与 c 符号相同时,方程表示椭圆.
- 当 a 与 c 符号相反时,方程表示双曲线.
- 当 $a=0$ 或 $c=0$ 时,方程表示抛物线.

让我们把二次型写成矩阵形式.设 X 与 A 是两个矩阵

```
>X:=matrix([[x],[y]]);   A:=matrix([[a,b],[b,c]]);
```

量

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),multiply(A,X));
```

叫做与二次方程相联系的二次型.注意到矩阵 A 是对称的.

应 用

例 5.1 考虑圆锥曲线

```
>3*x^2+2*x*y+3*y^2-8=0
```

它的图形是

```
>with(plots):
>implicitplot(3*x^2+2*x*y+3*y^2-8=0,x=-5..5,y=-5..5);
```

在这个例子中，不易确定圆锥曲线的某些特征，诸如它的中心、焦点，以及长轴和短轴，因为它不是标准形．项 $2xy$ 产生了轴的旋转．令 X 与 A 是

```
>X:=matrix([[x],[y]]);  A:=matrix([[3,1],[1,3]]);
```

方程可以写为

```
>X^T*A*X=8;
```

即

```
>multiply(transpose(X),multiply(A,X))=8;
```

这个椭圆的特征是什么？为了确定这些特征，把这个方程变为标准形．

让我们看看在这一过程中矩阵 A 的特征值及特征向量是否会有所帮助．

1．确定对称矩阵 A 的特征值（使用无步骤程式）

```
>eigenvals(A);
```

注意到矩阵 A 有两个不同的实特征值，4 与 2．

2．确定矩阵 A 的特征向量（使用无步骤程式）．

```
>eigenvects(A);
```

对应于特征值 2 与 4 的特征向量分别是

```
>ev1:=vector([-1,1]);  ev2:=vector([1,1]);
```

因此矩阵 A 是可对角化的．

3．规一化正交的特征向量 ev_1 与 ev_2

```
>a1:=sqrt(innerprod(ev1,ev1));  a2:=sqrt(innerprod(ev2,ev2));
>u1:=evalm(1/a1*ev1);  u2:=evalm(1/a2*ev2);
```

构造正交矩阵（旋转矩阵）Q，其列为向量 u_1 与 u_2

```
>Q:=transpose(matrix([u1,u2]));
```

4．矩阵 A 相似于对角矩阵 D_1，因为

```
>Q^T*A*Q=D1;
```

其中

```
>D1:=multiply(transpose(Q),multiply(A,Q));
```

5．引进新的坐标系 X_1

```
>X1:=matrix([[x1],[y1]]);
```

原来的坐标系 X 与新的坐标系 X_1 之间的关系是

```
>evalm(X)=multiply(Q,X1);
```

关于新的旋转轴，原来的二次表示

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),multiply(A,X));
```

是

```
>multiply(transpose(x1),multiply(D1,X1))=8;
```

这可以化简为圆锥曲线段的标准形

```
>1/2*x1^2+1/4*y1^2=1;
```

这样，椭圆关于新坐标系的特征是容易确定的．

多变量函数的最小化

另一个应用是确定多变量函数的**整体极值**.让我们假设 $f(x,y)$是两个变量的函数

```
>f:=(x,y)->a*x^2+2*b*x*y+c*y^2;
```

为了确定这个函数的极值,首先找 $f(x,y)$关于每个变量的偏导数:

```
>delta(f)/delta(x)=diff(f(x,y),x);
 delta(f)/delta(y)=diff(f(x,y),y);
```

令每个方程为 0 且解所得到的齐次方程组,我们得到驻点(0,0).假若系数矩阵非奇异,它将是唯一的驻点.把函数变成二次型:

```
>X:=matrix([[x],[y]]);  A:=matrix([[a,b],[b,c]]);
>f:=x->multiply(transpose(X),multiply(A,X));
>'f(x)'=f(x);
```

驻点(0,0)是极小值点、极大值点,或者是鞍点?答案依赖于下列条件之一.

- 驻点是整体极小值点,假如二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),multiply(A,X));
```

对所有异于 0 的 X 是严格正的.在这种情形下,对称矩阵 A 说成是**正定的**.这等价于说 A 的特征值都是正的.

- 驻点是整体极大值点,假如二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),multiply(A,X));
```

对所有异于 0 的 X 是严格负的.在这种情形下,对称矩阵 A 说成是**负定的**.这等价于说 A 的特征值都是负的.

- 驻点是鞍点,假如二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),multiply(A,X));
```

的符号改变.在这种情形下,二次型是**不定的**.

例 5.2　把函数的驻点分类

```
>f:=(x,y)->2*x^2-4*x*y+5*y^2;
```

它的二次型表示是

```
>X:=matrix([[x],[y]]);  A:=matrix([[2,-2],[-2,5]]);
>f:=X->multiply(transpose(X),multiply(A,X));
>'f(X)'=f(X);
```

矩阵 A 的特征值是

```
>eigenvals(A);
```

两个特征值都是正的.这告诉了二次型什么呢?对于特征值 1,特征向量 X 满足$AX=X$.计算二次型:

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),X);
```

对于特征值 6,特征向量 X 满足$AX=6X$.计算二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),evalm(6*X));
```

在每一种情形,二次型都是正定的(注意到两个特征值都是正的).因此,原点是整体极小值点.

例 5.3　考虑函数

```
>f:=(x,y)->-x^2+2*x*y-5*y^2;
```

它的二次型表示是

```
>X:=matrix([[x],[y]]);  A:=matrix([[-1,1],[1,-5]]);
>f:=X->multiply(transpose(X),multiply(A,X));
>'f(X)'=f(X);
```

计算矩阵 A 的特征值:

```
>eigenvals(A);
```

两个特征值都是负的.这告诉了二次型什么呢? 对于特征值 $-3+\sqrt{5}$,对特征向量 X,$AX=(-3+\sqrt{5})X$.计算二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),evalm((-3+sqrt(5))*X));
```

二次型是负定的.

对于特征值 $-3-\sqrt{5}$,对特征向量 X,$AX=(-3-\sqrt{5})X$.计算二次型

```
>X^T*A*X=multiply(transpose(X),evalm((-3-sqrt(5))*X));
```

二次型是负定的.因此,在这个例子中,原点是整体极大值点.

二次型是正定的当且仅当所有的特征值是正的.这时,驻点是整体极小值点.

二次型是负定的当且仅当所有的特征值是负的.这时,驻点是整体极大值点.

练　习

在下列练习中,你可能需要使用自动函数 eigenvals, eigenvects, diagonalize, hermitian,以及 Maple 命令 solve,matrix,rector,gausselim,rref 与 charpoly.

1. 识别二次方程 $3x^2+8xy+3y^2+28=0$ 的特征,把方程化为标准形.

2. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[a,b],[b,c]]);
```

如果 A 的特征值的乘积是负的,方程

```
>a*x^2+2*b*x*y+c*y^2=1;
```

表示什么类型的圆锥曲线段? 解释你的答案.

3. 找 c 的值,使矩阵

```
>A:=matrix([[c,1,1],[1,c,1],[1,1,c]]);
```

是正定矩阵.

4. 给定函数

```
>f:=(x,y)->-x^2+4*x*y-3*y^2;
```

原点是整体极大值点、整体极小值点,或是鞍点?

指导实验 6.1 特征值与离散系统

目 的

这个实验的目标是加强特征值与特征向量的概念并且应用它们分析离散动力系统.

自动 Linalg 函数

在这个实验中,你将使用自动函数 eigenvals,eigenvects,diagonalize 与 hermitian. 为了得到函数帮助,在 Maple 提示符号>? 后键入函数名;例如,>? eigenvals.

指 导

1. 为了执行一个陈述,利用鼠标或键盘移动光标至该行,并且按 enter 键.
2. 当执行一个函数时,必要时创建 Maple 输入区域;否则输出不会出现在希望的位置.
3. 执行下面的命令以装载软件包.

```
>with(linalg);with(lineign);
```

作业 1

这个作业的目的是推敲特征值与特征向量的概念.假设我们给定矩阵

```
>A:=matrix([[45,-21,-63,-12,21],[28,-12,-42,-7,14],
           [31,-15,-43,-9,15],[28,-14,-42,-5,14],
           [51,-25,-75,-14,27]]);
```

活动 1

求矩阵 A 的特征值(使用 eigenvals 的交互程式)

```
>eigenvals(A);
```

每个特征值的代数重数是多少?

活动 2

找特征向量(使用 eigenvects 的交互程式)

```
>eigenvects(A);
```

确定特征向量为 v_1, v_2, v_3, v_4 与 v_5. 每个特征值的几何重数是多少?

活动 3

基于活动 2,矩阵 A 相似于对角矩阵吗? 解释你的回答.

活动 4

构造矩阵 P,其列为活动 3 中的特征向量. 矩阵 P 唯一吗? 解释之.

活动 5

证明 A 相似于对角矩阵 D.

活动 6

证明矩阵 A 的迹等于特征值的和.

活动 7

计算乘积 $PD^iP^{-1}, i=2,3,4$. 这些乘积与 $A^i, i=2,3,4$ 比较会如何?

活动 8

对于给定的矩阵 A 与向量

```
>Y:=matrix([[y1],[y2],[y3],[y4],[y5]]);
```

解初值问题

```
>evalm((d/dt)*Y)=evalm(A)*evalm(Y);
```

按照初始条件 Y_0

```
>Y0:=matrix([[1],[0],[-1],[4],[3]]);
```

利用活动 7 中得到的结果写出解.(提示:构造 e^{At}.)

作业 2

这个作业的目的是利用特征值与特征向量来分析离散动力系统的性态. 考虑由差分方程 $x_{k+1}=Ax_k$ 定义的系统,其中

```
>A:=matrix([[0.9,0.04],[0.1,0.96]]);
```

及 x 的初始值 x_0

```
>x(0):=matrix([[0.3],[0.5]]);
```

活动 1

计算矩阵 A 的特征值

```
>eigenvals(A);
```

计算每个特征值的特征向量

```
>eigenvects(A);
```

活动 2

把初始条件 x_0 表示为活动 1 中的特征向量的线性组合.

活动 3

利用活动 2 中的结果计算第一个重复的 $x_1, x_2, x_3, \cdots$.

活动 4

导了 x_k 的一个表示.确定当 k 趋于无穷时解的性态.

额外实验题

1. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[0,1,0],[1,1,1],[0,1,0]]);
```

你能够在矩阵 A 及它的幂的特征值与特征向量之间提出一个一般的关系吗? 验证你的回答.

2. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]);
```

只用矩阵乘法,证明向量

```
>v:=vector([1,1,1]);
```

是对应于特征值 3 的特征向量.

3. 对于一个所有元等于 1 的 $n\times n$ 矩阵,你能提出一个类似的陈述吗? 矩阵 A 可对角化吗? 解释你的回答.

4. 用几个尺寸不同但所有元为 1 的矩阵作实验,来回答在实验题 2 与实验题 3 中提出的问题.

指导实验 6.2 二次型

目 的

这个实验的目标是分析特征向量与特征值的几何特性以及它们的性质和应用，特别地，二次型与它们的应用.

自动 Linalg 函数

在这个实验中，你将使用自动函数 eigenvals，eigenvects，diagonalize 与 hermitian. 为了得到一个函数的帮助，在 Maple 提示符>？后键入函数名；例如，>？eigenvals；

指 导

1. 为了执行一个陈述，用鼠标或键盘移动光标到该行，并且按 enter 键.
2. 当执行一个函数时，必要时创建 Maple 输入区域；否则输出不会出现在希望的位置.
3. 执行下列命令以装载软件包.

```
>with(linalg):with(lineign);
```

作业 1

这个作业的目的是回顾埃尔米特矩阵的概念. 考虑矩阵

```
>A:=matrix([[3,1+I,I],[1-I,1,3],[-I,3,1]]);
```

活动 1

矩阵 A 是埃尔米特阵吗？

活动 2

找矩阵 A 的特征值.

活动 3

找矩阵 A 的特征向量.

活动 4

证明矩阵 A 的特征向量是正交的.

活动 5

构造对角化矩阵 A 的矩阵 U.

作业 2

这个作业的目的是加强二次型与它们的应用的学习.考虑二次方程

```
>eq1:=2*x^2+2*x*y+2*y^2=9;
```

活动 1

执行下列 Maple 命令画出二次方程的图形

```
>with(plots):
>implicitplot(eq1,x=-10..10,y=-10..10,color=red);
```

从绘图中,你可以识别出这条圆锥曲线的特征吗(中心、焦点,与长轴和短轴)?

活动 2

把 eq_1 表示为二次型.即,定义矩阵 A 与向量 X 使得乘积 X^TAX 是 eq_1.

活动 3

找矩阵 A 的特征值与特征向量.

活动 4

矩阵 A 的特征向量是正交的吗?

活动 5

定义从原先的 xy－坐标系到新的 x_1y_1－坐标系的变换.为了把原来的二次型变为标准形,把变换坐标代入原来的形式中.

活动 6

利用标准形,识别关于新坐标轴的圆锥曲线段(中心、焦点与长轴和短轴).

额外实验题

定义函数

```
>f:=(x,y)->x^2+4*x*y+4*y^2-12;
```

找函数 $f(x,y)$ 对于下列条件的极小值.

```
>x^2+y^2=1;
```

(1) 写出对应于 f 的前三项的二次型.即,识别矩阵 A 与向量 X 使 X^TAX 等于这些项.

(2) 计算矩阵 A 的特征值与特征向量.

(3) 规一化矩阵 A 的特征向量.

(4) 计算 $f(x,y)$ 在每个特征向量处的值.哪个特征向量产生 $f(x,y)$ 的极小值?

(5) 从你的观察中你能总结出一个一般的陈述吗?

应用 6.1 生态模型

目 的

这个应用的目的是利用特征值与特征向量的概念分析一个生态模型并且预告它的性态.

初始化软件包.

```
>with(linalg):with(lineign),
```

生态模型的描述

考虑一个动物栖息地,其中羊(S)与狐(F)竞争生存.羊(S)的数目每年在缺少狐时生长20%而减少整个狐数目的12%.在缺少羊时,狐(F)的数目减少22%而增加整个羊数目的30%.

活动 1

写出描述一年后羊数目(S_1)与狐数目(F_1)的数学方程.把这个模型表为矩阵形式.

活动 2

我们想分析这个群体当它往后发展时的性态.假设初始数量是 $S_0=1000$ 与 $F_0=100$.一年后羊与狐的数量是多少?用矩阵乘法回答这个问题.预测2年后,3年后,10年后与20年后每种数量的大小?你认为羊与狐的数目都会连续生长吗?

活动 3

写出活动1中模型的系数矩阵.计算经它的特征值与特征向量.

活动 4

把初始数量大小表为活动3中确定的特征向量的线性组合.

活动 5

你能导出100年后每种数量的大小吗?一般地,几年后呢?

活动 6

每个数量的大小会达到一个稳定的情形吗？你的回答是如何与矩阵的特征值有关的？

活动 7

代替 22%，考虑狐数量的减少在 14%～22% 这个区域内.在该区域内，哪个百分率导致了数量的灭绝？

应 用 6.2

购物策略

目 的

这个应用的目的是决定一个购物策略并且证明特征值与特征向量的概念是如何应用于数学模型及此问题的分析上.

购物策略模型的描述

每个星期一个购物者购买某种商品并且从三种牌子中选择一种.购买哪种牌子的决定基于上周购买的牌子.如果购物者

• 上周购买牌子 1,则他购买牌子 1 的概率为 0.8,购买牌子 2 的概率为 0.1,购买牌子 3 的概率为 0.1.

• 上周购买牌子 2,则他购买牌子 1 的概率为 0.1,购买牌子 2 的概率为 0.8,购买牌子 3 的概率为 0.1.

• 上周购买牌子 3,则他购买牌子 1 的概率为 0.2,购买牌子 2 的概率为 0.2,购买牌子 3 的概率为 0.6.

下表总结了基于前周的购买这周购买一种牌子的概率.

	牌子 1	牌子 2	牌子 3
牌子 1	0.8	0.1	0.1
牌子 2	0.1	0.8	0.1
牌子 3	0.2	0.2	0.6

概率表示转变概率.设 B_n 是第 n 周购买的牌子.这样 $B_n=1$ 表示第 n 周购买的是牌子 1.让 $\mathrm{pr}(B_n=1)$ 记第 n 周购买牌子 1 的概率.因此,第 n 周的概率向量是

```
>p(n):=matrix([[pr(B(n)=1)],[pr(B(n)=2)],[pr(B(n)=3)]]);
```

活动 1

描述在连续两周中购买不同牌子的概率矩阵 A(例如,第 0,1 周).

活动 2

如果购物者第 0 周购买牌子 1,第 0 周的概率向量是

```
>p(0):=matrix([[1],[0],[0]]);
```

第 1 周每种牌子的概率向量是什么? 第 2,3,4 周呢?

活动 3

描述在第 $n+1$,n 周购买不同牌子的概率矩阵.

活动 4

证明矩阵 A 相似于对角矩阵.**提示**:计算矩阵 A 的特征向量.

活动 5

利用活动 4 中的结果计算 A^n.从而导出当 $n\to\infty$时 A^n 的极限.

活动 6

当 n 无限增大时 p_n 的极限存在吗? 极限依赖于第 0 周购买的牌子吗? 仔细地解释你的论断.

活动 7

活动 6 与活动 5 得到的结果之间有关系吗? 解释你的回答.

应　用 6.3

血中二氧化碳的浓度

目　的

在这个应用中我们研究与分析血中二氧化碳的浓度.特征值与特征向量的概念将用来分析这个模型.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lineign);
```

CO_2 浓度模型的描述

血中二氧化碳(CO_2)的产生与丧失过程是一个连续非线性过程.然而,我们假设这个过程的**离散化**,通过假定

• 呼吸产生在固定的时间间歇 $t,t+a,t+2a,t+3a,\cdots$,并且通气量 V_n+V_{t+na}被血中前一时间间歇的 CO_2 浓度水平 $C_{n-1}=C_{t+(n-1)*a}$控制.

• CO_2 在时刻 $t+(n+1)a$ 的浓度C_{n+1},是 C_n 减去丧失的 CO_2 的数量加上代谢产生的数量的函数.即,$C_{n+1}=$(前面血中 CO_2 的数量)-(丧失的 CO_2 的数量)+(固定的代谢产生的).

我们也将考虑这个过程的**线性化**,通过假定

• 丧失的 CO_2 的数量与通气量 V_n 成比例,比例常数为 C_1,并且不依赖于 C_n.

• 通气量 V_{n+1}直接与 C_n 成比例,比例常数为 C_2.

• 代谢产生的 CO_2 保持为一个常值 k.

活动 1

写出描述这一过程的数学方程.

活动 2

把这个非齐次线性方程组写为矩阵形式 $X_{n+1}=AX_n+K$,其中 $X_n=[C_n,V_n]$.

活动 3

利用初始数量 C_0 与 V_0,导出产生血中 CO_2 水平的 C_n 及通气量 V_n 的一般公式.

活动 4

得到矩阵 A 的特征值.用 A 的特征值写出解.

活动 5

假定 $4C_1C_2<1$,CO_2 的水平会不管初始条件而达到一个稳定的情形吗？如果是的话，这个稳定的情形是什么？对应的通气量的稳定情形是什么？

活动 6

假定 $4C_1C_2>1$,血中 CO_2 水平会达到一个稳定情形或是在摆动吗？

活动 7

如果活动 6 中量 C_1C_2 很大,摆动量会发生什么？摆动频率是什么？

活动 8

选择 C_1,C_2 与 K 及 C_0 与 V_0 的某几个不同的初始值,重复活动 2－活动 7 来证实你的断言.

应 用 6.4 红血细胞的产生

目 的

在这个应用中我们考虑红血细胞的产生，利用特征值与特征向量来分析这一模型.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(lineign);
```

红血细胞产生模型的描述

这个方案是对血中红血细胞(RBC$_S$)的产生这一连续且非线性过程建立离散模型. 红血细胞产生过程可以描述为:

1. RBC$_S$ 的一部分每日过滤出来且被脾脏破坏.
2. 骨髓产生的 RBC$_S$ 的数目与上一天丧失的数目成比例.
3. 红血细胞的数目将保持在某个固定的水平上.

使用下列记号:

- C_n:在 n 天循环的 RBC$_S$ 的数目
- P_n:被骨髓在 n 天产生的 RBC$_S$ 的数目
- f:被脾脏破坏的一部分 RBC$_S$
- c:产生常数

活动 1

写出表示在 n 天数目 C_n 与 P_n 的数学方程.

活动 2

写出活动 1 中得到的系统的矩阵方程.

活动 3

确定活动 2 中的系数矩阵的特征值.

活动 4

为了保持循环中 RBC_S 的整个数目 C_n 粗略一致,必须附加给特征值的条件是什么?

活动 5

基于活动 4,参数 c 的结论是什么?

活动 6

利用活动 4 与 5 的结果,研究 C_n 的性态.

事实的证明 1

第一单元　线性方程组

齐次线性方程组的可解性(课文 1.2)

事实 1.1

一个齐次线性方程组总是有解的.解集要么是单点集要么是无限的.

证明

因为平凡解(零解)是任解的齐次线性方程组的解,于是这样的方程组总是有解的.让 S 表示解集.我们有三种情况要考虑.

1.方程的个数(n)小于未知量的 T 数(m).在这种情况,方程组至少有 $m-n$ 个自由变量.这样方程组有无穷多个解,从而解集 S 是无限的.

2.方程的个数(n)等于未知量的个数(m).对方程组的系数矩阵应用初等行变换,如果得到的行都非 0,那么唯一的解是零解,而解集是单点集.然而,如果至少有一行化为零行,则方程组至少有一个自由变量.方程组将有无穷多个解,从而解集是无限的.

3.方程的个数(n)大于未知量的个数(m).对方程组的系数矩阵应用初等行变换,我们或者得到 n 行非 0,或者得到 p 行非 0,而 $p<m$.在这种情况,问题化为情形 1 或情形 2.

非齐次线性方程组的可解性(课文 1.2)

事实 1.2

每个线性方程组 $Ax=b$ 或者无解,或者恰有一解,或者有无穷多解.

证明

如果方程组无解,则已证完.假设方程组 $Ax=b$ 有解 x.我们将证明如果方程组有多于一个解,则它必定有无穷多个解.设 x_1 与 x_2 是这样两个解.则 $Ax_1=b$ 与 $Ax_2=b$ 导致 $A(x_1-x_2)=0$.令 $x=x_1-x_2$.则 $y=x_1+rx$ 对任意数量 r 也是 $Ax=b$ 的解.这是因为 $A(x_1+rx)=Ax_1+rAx=b+r0=b$.这样,如果 $Ax=b$ 有多于一个解,则它必定有无穷多个解.

事实的证明 2

第二单元 矩阵代数

关于非奇异矩阵的某些事实(课文 2.3)

事实 2.1

如果 $n\times n$ 矩阵 A 有逆,则其逆是唯一的.

证明

假设矩阵 A 有两个不同的逆 B 与 C. 则从矩阵的逆的定义及乘法的结合性导致

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

其中 I_n 是单位矩阵.

事实 2.2

如果 A 是 $n\times n$ 可逆矩阵,则 $(A^{-1})^{-1}=A$.

证明

设 $B=A^{-1}$. 从逆的定义 $BA=I_n$. 用 B^{-1} 去乘得 $B^{-1}(BA)=B^{-1}I_n=B^{-1}$. 这导致 $A=B^{-1}$. 因此,$(A^{-1})^{-1}=A$.

事实 2.3

如果 A 与 B 是 $n\times n$ 可逆矩阵,则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明

应用乘法的结合性及矩阵的逆的唯一性事实,我们得

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

因此,$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

事实 2.4

$n\times n$ 矩阵 A 是可逆的当且仅当它是行等价于单位矩阵 I_n.

证明

用单位矩阵增广矩阵 A 得 $[A:I_n]$,应用 Gauss-Jordan 消去法,我们观察到矩阵 A 是可逆的当且仅当 $[A:I_n]$ 化简的行阶梯形变为 $[I_n:B]$;即,矩阵 A 用一列初等矩阵 $E_1,E_2,E_3,$

$\cdots, E_r$ 左乘而产生单位矩阵.这时,$E_rE_{r-1}E_{r-2}\cdots E_2E_1A = I_n$.因此,$A$ 可逆当且仅当 A 化为单位矩阵 I_n.

非奇异矩阵与线性方程组(课文 2.3)

事实 2.5

如果 $Ax = b$ 是 n 个方程与 n 个未知量的线性方程组,并且如果 A 是非奇异矩阵,则方程组有唯一解 $x = A^{-1}b$.

证明

我们将首先证明 $x = A^{-1}b$ 是方程组的解.这是因为 $Ax = AA^{-1}b = (AA^{-1})b = I_nb = b$.接着我们证明解是唯一的.假设 x_1 与 x_2 是方程组的两个不同解,则有 $Ax_1 = b$ 与 $Ax_2 = b$.因此,$A(x_1 - x_2) = 0$.因为 A 是非奇异的,用 A^{-1} 去乘,导致 $x_1 - x_2 = 0$.与有两个不同解的假设矛盾.这样,解是唯一的.

事实 2.6

从事实 2.5 我们可以推出,如果对 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组 $Ax = 0$,$n \times n$ 系数矩阵 A 是非奇异的,则方程组有唯一解(零解).

关于行列式的某些事实(课文 2.5)

事实 2.7

设 A 与 B 是任意的 $n \times n$ 矩阵而 k 是任意非零的数量.下列性质成立:

a. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b. $\det(A^T) = \det(A)$,其中 A^T 是 A 的转置.

c. 如果 A 是非奇异矩阵,则 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

d. 如果 B 是用 k 乘 A 的某行(列)得到的矩阵,则 $\det(B) = k * \det(A)$.

e. 如果 B 是用 k 乘 A 得到的矩阵,则 $\det(B) = k^n\det(A)$.

f. 如果 B 是交换 A 的两行(列)得到的矩阵,则 $\det(B) = -\det(A)$.

g. 如果 B 是把 A 的某行(列)的倍数加到另一行(列)而得到的矩阵,则 $\det(B) = \det(A)$.

h. 如果矩阵 A 的两行(列)是一样的,则 $\det(A) = 0$.

i. 如果矩阵 A 的一行(列)是 0,则 $\det(A) = 0$.

j. 如果矩阵 A 的两行(列)成比例,则 $\det(A) = 0$.

(c)的证明

从(a)及事实 $A^{-1}A = I_n$,有

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(d)的证明

回忆起对矩阵 A 应用初等行变换,相当于左乘矩阵 A 以对应的初等矩阵.假若 A 的第 i 行乘以常数 k,这等价于写为 $B = EA$,其中 E 是单位矩阵 I_n 的第 i 行乘以非零数量 k 得到的初等矩阵.因为 $\det(E) = k$,于是

$$\det(B) = \det(EA) = \det(E)\det(A) = k * \det(A).$$

(e)的证明

这是(d)的一个显然的结论.

(f)的证明

如果 A 的第 i 行与第 j 行互换得到矩阵 B,则这等价于写为 $B=EA$,其中 E 是互换单位矩阵 I_n 的第 i 行与第 j 行而得到的初等矩阵. 因为 $\det(E)=-1$ $(E^2=I)$,所以

$$\det(B) = \det(EA) = \det(E)\det(A) = -\det(A)$$

(g)的证明

如果矩阵 B 是把矩阵 A 的第 j 行换为 A 的第 i 行的某倍与 A 的第 j 行的和而得的矩阵,则这等价于写为 $B=EA$,其中 E 是把 I_n 的第 i 行换为 I_n 的第 i 行的某倍与 I_n 的第 j 行之和而得到的初等矩阵,因为 $\det(E)=1$(E 是三角矩阵),导致有

$$\det(B) = \det(EA) = \det(E)\det(A) = \det(A).$$

行列式与非奇异矩阵(课文 2.5 与 2.6)

事实 2.8

$n \times n$ 矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $\det(A) \neq 0$.

证明

假设 A 是非奇矩阵. 则 $A^{-1}A=I_n$ 导致

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = 1.$$

因此 $\det(A) \neq 0$. 反之,假设 $\det(A)$ 不等于零. 从变换 A 到它的简化阶梯形结出的一列初等矩阵 E_i 是使得 $\det(E_i) \neq 0$,对每个 i,因为 $\det(A) \neq 0$. 这样,A 的简化阶梯形有非零的行列式. 因为唯一的有非零的行列式的 $n \times n$ 简化阶梯形是单位矩阵,这导致矩阵 A 能够用一列初等行变换化简为单位矩阵. 这样 A 是非奇异矩阵.

事实 2.9

设 A 是 $n \times n$ 非奇异矩阵,则 A^{-1} 由下式给出

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

证明

利用按第 i 行的余子式展开,我们得到

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

其中 C_{ij} 是元 A_{ij} 的余子式. 设 B 是把 A 的第 i 行与第 j 行都换为 A 的第 i 行而得到的 $n \times n$ 的矩阵. 则利用按 B 的第 j 行余子式展开将产生

$$\det(B) = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

因为 $\det(B)=0$,则有

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$$

考虑矩阵 $A\times Adj(A)=(d_{ij})$. 则

$$d_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

我们注意到如果 $i=j$, 则 $d_{ij}=\det(A)$, 否则为 0. 因此

$$A \times Adj(A) = \det(A) I_n$$

因为 A 是非奇异的,两边用 A^{-1} 去乘得到结果

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$

行列式与线性方程组(课文 2.5)

事实 2.10

假设 $Ax=b$ 是 n 个方程 n 个未知量的线性方程组. 如果 $\det(A)$ 不为 0, 则方程组有唯一解;否则,方程组有无穷多个解或者无解.

证明

如果 $\det(A)\neq 0$, 则 A 是非奇异的. 事实 2.5 导出解是唯一的且由 $x=A^{-1}b$ 给出. 另一方面,如果 $\det(A)=0$, 则矩阵 A 的化简阶梯形不是单位矩阵. 这时,方程组不能有唯一解. 这样,方程组可能无解或者有无穷多个解.

事实 2.11(Cramer 法则)

假设 $Ax=b$ 是 n 个方程 n 个未知量的线性方程组. 如果 $\det(A)\neq 0$, 方程组的唯一解由 $x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, $i=1,2,3,\cdots,n$ 给出,其中 A_i 是把 A 的第 i 列换成 b 所得到的矩阵.

证明

因为矩阵 A 是非奇异的,于是解由 $x=A^{-1}b$ 给出. 这样

$$x = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) * b.$$

因此,解是

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}(b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + b_3C_{3i} + \cdots + b_nC_{ni}),\ i = 1,2,\cdots,n$$

其中 C_{ij} 是 $Adj(A)$ 的 ij 元. 但是 $b_1C_{1i}+b_2C_{2i}+b_3C_{3i}+\cdots+b_nC_{ni}=\det(A_i)$, 这样

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

事实的证明 3

第三单元　线性空间

子空间(课文 3.3)

事实 3.1

如果 S 是一个给定的线性空间 V 的子空间,则零向量 $\mathbf{0}$ 在 S 中.

证明

设 v 是 S 中的一向量而 0 是数量. 因为 S 在数量乘法下是封闭的,这就有$\mathbf{0}=0*v$ 在 S 中.

线性组合与生成(课文 3.2)

事实 3.2

设 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$是线性空间 V 的子集. 则 S 的所有线性组合之集

$$L(S)=\{a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n \mid a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n \text{ 在}\mathbb{R}\text{中}\}$$

是 V 的子空间

证明

我们需要证明 S 在加法及数乘下都是封闭的,设

$$u_1=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots a_nv_n$$

与

$$u_2=b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\cdots b_nv_n$$

是 $L(S)$的任意两个元素,则

$$u_1+u_2=(a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+(a_3+b_3)v_3+\cdots+(a_n+b_n)v_n$$

因为每个 $a_i+b_i\in\mathbb{R}$ 对 $i=1,2,3,\cdots,n$,导致 u_1+u_2 是 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的线性组合,因此它属于 $L(S)$. 这样 $L(S)$在加法下封闭. 如果 c 是一个任意的数量,则

$$cu_1=c(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n)=ca_1v_1+ca_2v_2+ca_3v_3+\cdots+ca_nv_n$$

因为每个 $ca_i \in \mathbb{R}$ 对 $i=1,2,3,\cdots,n$，导致 cu_1 是 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的线性组合，因此它属于 $L(S)$. 即 $L(S)$在数乘下封闭. 综上所述，$L(S)$在加法及数乘下封闭，导致 $L(S)$是 V 的由集合 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$生成的子空间.

线性方程组与线性组合(课文 3.2 与课文 3.4)

事实 3.3

$\mathbb{R}^m$ 中的向量 w 是$\mathbb{R}^m$ 中的向量集$\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$的线性组合当且仅当相应的非齐次 $m\times n$ 线性方程组$Ac=b$ 有非平凡解.

证明

向量 $w=[b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n]$是$\mathbb{R}^m$中向量集$\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$的线性组合当且仅当存在数量 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$，使得

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n$$

因为向量 $v_i=[a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots,a_{im}]$，$i=1,2,\cdots,n$，我们有非齐次方程组

$$\begin{aligned} c_1a_{11} + c_2a_{21} + c_3a_{31} + \cdots + c_na_{n1} &= b_1 \\ c_1a_{12} + c_2a_{22} + c_3a_{32} + \cdots + c_na_{n2} &= b_2 \\ &\vdots \\ c_1a_{1m} + c_2a_{2m} + c_3a_{3m} + \cdots + c_na_{nm} &= b_m \end{aligned}$$

这等价于矩阵方程 $Ac=b$，其中 A 是 $m\times n$ 系数矩阵$[a_{ij}]$而 c 是 $n\times 1$ 矩阵$[c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n]$. 向量 w 是向量$v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的线性组合当且仅当此非齐次方程组有非平凡解.

事实 3.4

如果线性空间 V 的集$S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$至少有一个向量是 S 中所余下向量的线性组合，则 S 是相关集.

证明

设对某 i，v_i 是$\{v_i,v_2,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n\}$的线性组合. 则存在数量 $c_1,c_2,\cdots,c_{i-1},c_{i+1},\cdots,c_n$ 使得

$$v_i = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n$$

这样，存在不全为 0 的数量(特别是 v_i 的系数)，使得

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n = 0$$

因此，由定义，集 S 是线性相关的.

事实 3.5

如果线性空间 V 的集$S=\{0,v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$包含零向量，则 S 是相关集.

证明

设 $c,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是数量，考虑 S 的元的零组合：

$$c0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$

显然，如果所有的 ci 为 0 而 c 是任意非 0 数量，这个组合成立. 这样存在非零数量(这时为 c)，使得

$$c0+c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n=0$$

因此 S 是相关集.

事实 3.6

如果 S_1 是线性空间 V 的线性无关集 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 的非空子集,则 S_1 必定是无关集.

证明

用反证法.假设集 $S_1=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_k\}$ 在 S 中且是相关集.于是存在不全为 0 的数量 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得 $c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k=0$.如果我们选择数量 $c_{k+1}=0,c_{k+2}=0,\cdots,c_n=0$,我们有

$$c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k+c_{k+1}v_{k+1}+c_{k+2}v_{k+2}+\cdots+c_nv_n=0$$

其中的数量不全为 0.这样导致集 S 是线性相关的.这就证明了子集 S_1 必定是无关的.

齐次线性方程组与相关/无关集(课文 3.4)

事实 3.7

$\mathbb{R}^m$ 中向量集 $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是线性相关的当且仅当相应的齐次 $m\times n$ 线性方程组 $Ax=0$ 有非平凡解.

证明

$\mathbb{R}^m$ 中的集 $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是相关集当且仅当存在不全为 0 的数量 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 $c_1v_1+c_2v_2+\cdots c_nv_n=0$.因为对 $i=1,2,\cdots,n$,向量 v_i 是 $v_i=[a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots,a_{im}]$,我们有齐次方程组

$$\begin{gathered}c_1a_{11}+c_2a_{21}+c_3a_{31}+\cdots+c_na_{n1}=0\\ c_1a_{12}+c_2a_{22}+c_3a_{32}+\cdots+c_na_{n2}=0\\ \vdots\\ c_1a_{1m}+c_2a_{2m}+c_3a_{3m}+\cdots+c_na_{nm}=0\end{gathered}$$

这等价于矩阵方程 $Ac=0$,其中 A 是 $m\times n$ 系数矩阵$[a_{ij}]$即 c 是 $n\times 1$ 矩阵$[c_1,c_2,\cdots,c_n]$.现在数量 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 不全等于 0 当且仅当齐次方程组有非平凡解.

事实 3.8

$\mathbb{R}^n$ 中的向量集 $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是线性无关的当且仅当相应的齐次 $n\times n$ 线性方程组 $Ax=0$ 有唯一解.

基与维数(课文 3.5)

事实 3.9

设 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是线性空间 V 的基.每个含 m 个向量且 $m>n$ 的集 $S_1=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_m\}$ 必定是相关的,因此不能是 V 的基.

证明

我们想证明存在不全为 0 的数量,使得

$$k_1u_1+k_2u_2+\cdots+k_mu_m=0$$

因为 S 是线性空间 V 的基，于是每个向量 $u_i,i=1,2,\cdots,m$ 可以表成基向量 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的线性组合.即

$$u_1=c_{11}v_1+c_{12}v_2+\cdots+c_{1n}v_n$$
$$u_2=c_{21}v_1+c_{22}v_2+\cdots+c_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_m=c_{m1}v_1+c_{m2}v_2+\cdots+c_{mn}v_n$$

把这些代入 $k_1u_1+k_2u_2+\cdots+k_mu_m=0$，我们得到 n 个方程 m 个未知量 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 的齐次方程组.因为 $m>n$，于是齐次方程组有非平凡解.因此，存在数量 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为 0，使得

$$k_1u_1+k_2u_2+\cdots+k_mu_m=0$$

于是 $S_1=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_m\}$ 是相关的.

事实 3.10

设 V 是维数为 n 的线性空间.则任意 n 个线性无关向量的集 $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 形成 V 的基.

证明

只要证明 $L(S)=V$.因为 $L(S)$ 是 V 的子集，我们只需证明 V 是 $L(S)$ 的子集.设 v 在 V 中.因为 V 的维数是 n，事实 3.9 导数集 $\{v,v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是相关集.因此存在数量 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$，使得

$$cv+c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n=0\quad(c\neq 0)$$

而这导致

$$v=(-c_1/c)v_1+(-c_2/c)v_2+\cdots+(-c_n/c)v_n$$

因此，$v\in L(S)$，从而 $V=L(S)$.

事实 3.11

设 V 是 n 维的线性空间.则任意生成空间 V 的 n 个向量的集 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 形成 V 的基.

证明

只要证明集 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 是线性无关的.如果 S 是相关集，则 v_i 中有一个是剩余向量的线性组合.这导致一个 $n-1$ 个向量的集生成一个 n 维空间.这不可能，所以集 S 是线性无关的.

事实 3.12

线性空间 V 的基不是唯一的.但所有的基的元素个数相同.

证明

设 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ 与 $U=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_m\}$ 是线性空间 V 的两个基.由事实 3.9，有

(1)如果 S 是 V 的基而 U 是 V 的无关集，则 $m\leqslant n$；

(2)另一方面,如果 U 是 V 的基而 S 是 V 的无关集,则 $n \leqslant m$.

因此 $n=m$.这证明了所有基的元素个数必相同.

事实 3.13

设 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$是线性空间 V 的基.则 V 中的每个向量 w 能唯一地表成 S 中元素的线性组合.

证明

假设向量 w 可以用两种不同的方式表为向量 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的线性组合.这样存在数量 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$ 与 $d_1,d_2,d_3,\cdots,d_n$,使得

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

与

$$w = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_nv_n$$

有

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_nv_n$$

这导致

$$(c_1-d_1)v_1 + (c_2-d_2)v_2 + (c_3-d_3)v_3 + \cdots + (c_n-d_n)v_n = 0$$

因为集 $S=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$是基,向量 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 是线性无关的.这就有 $c_1=d_1$, $c_2=d_2,c_3=d_3,\cdots,c_n=d_n$.因此,向量 w 可以唯一地表为它的基元素的线性组合.

矩阵的行空间与列空间(课文 3.6)

事实 3.14

$m\times n$ 矩阵A 的行空间与列空间分别生成$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^m$ 的子空间.

因为初等行变换不改变矩阵的行空间,我们有

事实 3.15

$m\times n$ 矩阵A 的阶梯形的非 0 行构成 A 的行空间的基.

事实 3.16

$m\times n$ 矩阵A 的行空间与列空间有同样的维数.这个公共的数定义为矩阵 A 的秩.

证明

设 $r_i=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\}$是矩阵 A 的第i 行,$i=1,2,\cdots,m$.让我们假设行空间的维数为 p 而向量$v_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})$,$i=1,2,\cdots,p$ 是行空间的基.于是 A 的每行可以表为这些v_i 的线性组合,于是对每个 i 我们有 $r_i=c_{i1}v_1+c_{i2}v_2+\cdots+c_{ip}v_p$.这导致对 $j=1,2,\cdots,n$,我们有

$$\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1p}b_{pj},\\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2p}b_{pj},\\
&\vdots\\
a_{nj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mp}b_{pj}.
\end{aligned}$$

这个计算转而导致矩阵 A 的每列是形如$c_i=(c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{mi})$,$i=1,2,\cdots,p$ 的p 列的线性

组合.这样 dim(列空间)$\leqslant$dim(行空间).类似地,我们可以证明 dim(行空间)$\leqslant$dim(列空间).于是,$m\times n$ 矩阵A 的行空间与列空间有相同的维数.

事实 3.17

$n\times n$ 矩阵A 是非奇异的当且仅当 $\mathrm{rank}(A)=n$.

证明

矩阵 A 是非奇异的当且仅当矩阵A 是行等价于单位矩阵,当且仅当 A 有n 个无关行,当且仅当 $\mathrm{rank}(A)=n$.

事实 3.18

设 A 是$m\times n$ 矩阵即$Ax=b$ 是m 个方程n 个未知量的线性方程组.则方程组有解当且仅当增广矩阵的秩 $\mathrm{rank}[A:b]$等于系数矩阵的秩 $\mathrm{rank}[A]$.

证明

方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当列向量b 属于A 的列空间.这样,如果向量 b 加入到矩阵A 的列当中,则增广矩阵的秩不会改变.如果是这样的话,则系数矩阵的秩与增广矩阵的秩是相等的.

事实的证明 4

第四单元　内积空间

数量积(点积/内积)的性质

事实 4.1

设 u,v 与 w 是$\mathbb{R}^n$ 中三个向量而 k 是实数量.则下列性质成立:

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot u \geqslant 0$ 且 $u \cdot u = 0$ 当且仅当 $u = 0$.
3. $(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k(u \cdot v)$
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

证明

设 $u = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$,$v = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$与 $w = [w_1, w_2, \cdots, w_n]$是$\mathbb{R}^n$ 中的三个向量.于是,$\mathbb{R}^n$ 中的标准内积导致

1. $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = v \cdot u$

2. $u \cdot u = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \cdots + (u_n)^2 \neq 0$,除非 $u = [0,0,\cdots,0]$是零向量.

3.

$$\begin{aligned}(ku) \cdot v &= [ku_1, ku_2, \cdots, ku_n] \cdot [v_1, v_2, \cdots, v_n] \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \cdots + (ku_n)v_n \\ &= u_1(kv_1) + u_2(kv_2) + \cdots + u_n(kv_n) \\ &= u \cdot (kv) = k(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) = k(u \cdot v)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}u \cdot (v + w) &= [u_1, u_2, \cdots, u_n] \cdot [v_1 + w_1, v_2 + w_2, \cdots, u_n + w_n] \\ &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + \cdots + u_n(v_n + w_n) \\ &= uv_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + \cdots + u_nv_n + u_nw_n \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n + u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n \\ &= u \cdot v + u \cdot w\end{aligned}$$

事实 4.2(Cauchy-Schwartz 不等式)

设 u 与 v 是$\mathbb{R}^n$ 中的两个向量.则下列不等式成立:$|u\cdot v|\leqslant \|u\|\ \|v\|$,其中$\|v\|$表示向量 v 的范数(长度、量值).等号成立假若两个向量是线性相关的.

证明

如果其中一个向量是另一个向量的倍数,等号成立,没有什么可证明的.假设向量是非零向量.设 a 是一个实数,构造向量 $w=au+v$.因为积 $w\cdot w\geqslant 0$,这导致

$$a^2(u\cdot u)+2a(u\cdot v)+(v\cdot v)\geqslant 0.$$

可把上式视为 a 的二次不等式,因为二次项 a^2 的系数总是正的,判别式

$$4(u\cdot v)-4(u\cdot u)(v\cdot v)\leqslant 0.$$

这观察导致$|u\cdot v|\leqslant \|u\|\ \|v\|$.

事实 4.3(三角不等式)

设 u 与 v 是$\mathbb{R}^n$ 中的两个向量,则下列不等式成立:$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$.等号成立假若两个向量是线性相关的.

证明

由内积的性质及 Cauchy-Schwartz 不等式,有

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=(u+v)\cdot(u+v)=(u\cdot u)+2(u\cdot v)+(v\cdot v)\\&\leqslant\|u\|^2+2\|u\|\ \|v\|+\|v\|^2\\&=(\|u\|+\|v\|)^2.\end{aligned}$$

这个计算产生希望的不等式.

正交集与 Gram-Schmidt 过程

事实 4.4

向量 v 在向量 u 上的正交投影记为 $\mathrm{proj}_u v$,由 $\mathrm{proj}_u v=\left(\dfrac{v\cdot u}{u\cdot u}\right)u$ 给出,而 $v-\mathrm{proj}_u v$ 与 u 正交.

证明

我们只需验证 u 与 $v-\mathrm{proj}_u v$ 正交.计算这两个向量的内积

$$u\cdot(v-\mathrm{proj}_u v)=u\cdot v-\left(\frac{v\cdot u}{u\cdot u}\right)u\cdot u=u\cdot v-v\cdot u=0$$

事实 4.5

如果集 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是线性空间 V 的正交基,则每个向量 $v\in V$ 可以表为

$$v=(v\cdot v_1)v_1+(v\cdot v_2)v_2+\cdots+(v\cdot v_n)v_n$$

证明

因为集$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$形成基,于是每个向量 $v\in V$ 可以表为

$$v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n$$

因为集$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是正交的,导致 $v_i\cdot v=c_i(v_i\cdot v_i)=c_i$.这就证明了向量 v 可以表为

$$v = (v \cdot v_1)v_1 + (v \cdot v_2)v_2 + \cdots + (v \cdot v_n)v_n$$

事实 4.6

如果 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是由非零的两两正交的向量组成的非空子集，则集 S 是线性无关集.

证明

考虑 S 的元的线性组合 $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n=0$. 对每个 $i=1,2,\cdots,n$，积

$$v_i \cdot (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n) = 0$$

因为向量是相互正交的，于是 $c_i(v_i \cdot v_i)=0$. 这样，对每个 i，$c_i=0$，这证明了向量集是线性无关的.

事实 4.7

设集 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是线性空间 V 的基. 则从基 S 出发构造正交基 $O=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 的过程是 $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$，$w_2=v_2-\mathrm{proj}_{u_1}v_2$ 而 $u_2=\frac{w_2}{\|w_2\|}$，…，一般地

$$w_n = v_n - \mathrm{proj}_{u_{n-1}}v_n - \mathrm{proj}_{u_{n-2}}v_n - \cdots - \mathrm{proj}_{u_1}v_n; \quad u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

证明

很清楚 u_1 是单位向量. u_2 在 u_1 上的正交投影导致向量 w_2 与 u_1 正交. 这样，$\{u_1,u_2\}$ 是正交基的前两个元素. 现在我们构造第 3 个向量 w_3，它与 u_1 和 u_2 都是正交的. 向量 $w_3=v_3-\mathrm{proj}_{u_2}v_3-\mathrm{proj}_{u_1}v_3$ 与 u_1 和 u_2 都是正交的. 这样，集 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 组成了正交基的前 3 个元素，重复这个过程直到用完集 S 的所有元素，构造出来的集就是希望的正交基.

正交的矩阵与 QR－分解（课文 4.4）

事实 4.8

对任意的正交矩阵 A，下列性质成立：

- A 的行形成一个正交集.
- A 的逆存在且 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$.
- $\det(A)=+1$ 或 -1.

事实的证明 5

第五单元　线性变换

线性变换代数(课文 5.1)

设 T_1 与 T_2 是两个定义自线性空间 U 到线性空间 V 内的线性变换.这些变换的和与数量积可以定义为

$$(T_1+T_2)(u)=T_1(u)+T_2(u),\quad (cT_1)(u))=cT_1(u)$$

对任意的 U 中的 u 与实数量 c.

事实 5.1

设 $T_1:U\to V, T_2:U\to V$ 与 $T_3:U\to V$ 是定义自线性空间 U 到线性空间 V 内的三个线性变换.下列性质成立:

- $T_1+T_2=T_2+T_1$
- $(T_1+T_2)+T_3=T_1+(T_2+T_3)$
- $T_1+0=0+T_1=T_1$,其中 0 是把 U 中每个向量映为 V 中 0 的变换
- $T_1+(-T_1)=0$,
- $c(T_1+T_2)=cT_1+cT_2$
- $(c_1+c_2)T_1=c_1T_1+c_2T_1$
- $1\cdot T_1=T_1$.

事实 5.2

设 $T:U\to V$ 是从线性空间 U 到线性空间 V 内的线性变换,则 $T(0)=0$.即,如果 T 是线性变换,则它把 U 的零元素映为 V 的零元素.这个论断的逆不真.

证明

因为 T 是线性变换,$T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)$.这样 $T(0)=0$.

设 $T_1:W\to V$ 与 $T_2:V\to W$ 分别是从线性空间 W 到 V 与从 V 到 W 的两个线性变换.线性变换的复合 $T_1\circ T_2$,从 V 到 V 定义为

$$(T_1\circ T_2)(v)=T_1(T_2(v))$$

事实 5.3

线性变换的复合是线性变换.

证明

如果 $T_1: W \to V$ 与 $T_2: V \to W$ 分别是从线性空间 W 到 V 与从 V 到 W 的两个线性变换,则对 V 中任意的向量 v_1 与 v_2 及任意的实数量 a 与 b,

$$(T_1 \circ T_2)(av_1 + bv_2) = T_1(T_2(av_1 + bv_2))$$

因为 T_2 是线性变换,于是

$$(T_1 \circ T_2)(av_1 + bv_2) = T_1(aT_2(v_1) + bT_2(v_2))$$

因为 T_1 是线性变换,于是

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(av_1 + bv_2) &= aT_1(T_2(v_1)) + bT_1(T_2(v_2)) \\ &= a(T_1 \circ T_2)(v_1) + b(T_1 \circ T_2)(v_2)\end{aligned}$$

复合是线性变换.

线性变换的核与象(课文 5.1 与课文 5.2)

事实 5.4

设 $T: U \to V$ 是线性变换.设 $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是线性空间 U 的基.

1. T 在 U 上的作用由它在基集 B 上的作用确定.

2. $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ 是 range(T)的基当且仅当 $\ker(T) = \{0\}$.

证明

1. 因为 $T(u_i)$ 已定义,对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$. 而每个向量是基集 B 的元的线性组合,$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$,于是 $T(u)$ 就完全确定了.

2. 很清楚集 $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ 生成 range(T). 我们需要验证这个集是线性无关的.设

$$a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_nT(u_n) = 0.$$

因为 T 是线性变换,于是 $T(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) = 0$,导致 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ 在 $\ker(T)$ 中.现在 $\ker(T) = \{0\}$ 导致 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$. 因为向量集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是基,于是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. 这样,集 $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ 是线性无关的且形成 range(T)的基.

如果 $u \in \ker(T)$ 是非零向量,则

$$\begin{aligned}0 = T(u) &= T(au_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_nT(u_n)\end{aligned}$$

因为集 $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ 是 range(T)的基,于是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. 因此,$\ker(T)$ 不能包含任意的非零元,而 $\ker(T) = \{0\}$.

事实 5.5

设 $T: U \to V$ 是线性变换. 于是下列论断为真:

a. $\ker(T)$ 是 U 的子空间.

b. range(T)是 V 的子空间.

证明

a. 我们需要证明 ker(T)在加法下及数乘下是封闭的. 观察到 ker(T)是 U 的非空子集,因为它包含 0(为什么?). 如果 u_1 与 u_2 是 ker(T)的任意两个元素,则 $T(u_1)=0$ 及 $T(u_2)=0$. 因为 T 是线性变换,$T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)=0$. 同样,如果 c 是任意的数量,则 $T(cu_1)=cT(u_1)=0$. 这样,u_1+u_2 与 cu_1 属于 ker(T). 因此,ker(T)是 U 的子空间.

b. 我们需要证明 range(T)在加法与数乘下封闭的. 观察到 range(T)是 V 的非空子集,因为它包含 0(为什么?). 如果 v_1 与 v_2 是 range(T)的任意两个元素,则存在 U 中的 u_1 与 u_2 使得 $T(u_1)=v_1$ 与 $T(u_2)=v_2$. 因为 T 是线性变换,所以

$$T(u_1+u_2) = T(u_1)+(u_2) = v_1+v_2$$

同样,如果 c 是任意的数量,则 $T(cu_1)=cT(u_1)=cv_1$. 这样,v_1+v_2 与 cv_1 属于 range(T). 因此,range(T)是 V 的子空间.

事实 5.6(维数定理)

设 $T: U \to V$ 是线性变换. 则

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{range}(T)) = \dim(U)$$

证明

假设 $B=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$是 U 的基. 如果 $\ker(T)=\{0\}$,则事实 5.4 导致集$\{T(u_1), T(u_2),\cdots,T(u_n)\}$是 range($T$)的基. 这时,定理成立,其中

$$\dim(\ker(T)) = 0,\quad \dim(\operatorname{range}(T)) = \dim(U) = n$$

现在假设 $\dim(\ker(T))=m$. 如果 $m=n$,则 $\ker(T)=U$,而这时 T 是零变换,因此 $\operatorname{range}(T)=\{0\}$. 现在考虑情形 $1\leqslant m<n$. 设 $B_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$是 ker($T$)的基. 如果我们验证了集 $T_1=\{T(u_{m+1}),T(u_{m+2}),\cdots,T(u_n)\}$是 range($T$)的基,则就成功了. 首先我们证明 T_1 生成 range(T). 设 $v\in\operatorname{range}(T)$,则存在向量 $u\in U$ 使得 $T(u)=v$. 因为 B 是线性空间 U 的基,于是

$$u = a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m+a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n$$

现在

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m+a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n) \\ &= a_1T(u_1)+a_2T(u_2)+\cdots+a_mT(u_m)+a_{m+1}T(u_{m+1})+\cdots+a_nT(u_n) \\ &= a_{m+1}T(u_{m+1})+\cdots+a_nT(u_n). \end{aligned}$$

这样集 T_1 生成 range(T). 集 T_1 是线性无关的,这是因为

$$a_{m+1}T(u_{m+1})+\cdots+a_nT(u_n) = 0$$

导致

$$T(a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n) = 0$$

转而导致

$$a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n \in \ker(T)$$

这样

$$a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n = a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_{m-1}u_{m-1}+a_mu_m$$

最终导致

$$-a_1u_1-a_2u_2-\cdots-a_{m-1}u_{m-1}-a_mu_m+a_{m+1}u_{m+1}+\cdots+a_nu_n=0$$

因为 B 是 U 的基，于是 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 这就证明了集 T_1 是 range(T)的基. 这样，

$$\dim(\ker(T))+\dim(\text{range}(T))=\dim(U).$$

事实 5.7

线性变换 $T:U\to V$ 是 1-1 的当且仅当 $\ker(T)=\{0\}$.

证明

对任意向量 $u_1,u_2\in U,T(u_1)=T(u_2)\Rightarrow T(u_1-u_2)=0\Rightarrow u_1-u_2\in\ker(T)\Rightarrow u_1=u_2$.

事实 5.8

设 $T:U\to U$ 是线性变换. 则下列断言等价：

- $\ker(T)=\{0\}$.
- T 是 1-1 的.
- T 的逆存在.

线性变换的矩阵表示(课文 5.3)

如果 U 是线性空间，基为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则任意向量 $u\in U$ 可以唯一地表为 $u=u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_ne_n$. 向量 u 相对于基 E 的坐标，记为 u_E，是$[u_1,u_2,\cdots,u_n]$.

事实 5.9

设 $T:U\to V$ 是从线性空间 U 到线性空间 V 内的线性变换，U 和 V 的基分别为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 与 $E_1=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$. 则相对于这些基存在 $m\times n$ 矩阵 A 表示变换 T.

证明

设 u 是 U 中的任意向量，相对于基 E 它的坐标为 $u_E=[u_1,u_2,\cdots,u_n]$；即

$$u=u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_ne_n$$

则

$$T(u)=T(u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_ne_n)=u_1T(e_1)+u_2T(e_2)+\cdots+u_nT(e_n)$$

现在每个 $T(e_i),i=1,2,\cdots,n$，用 V 的基可以唯一地展开. 这样，

$$\begin{aligned}T(e_1)&=a_{11}s_1+a_{21}s_2+\cdots+a_{m1}s_m\\T(e_2)&=a_{12}s_1+a_{22}s_2+\cdots+a_{m2}s_m\\&\vdots\\T(e_n)&=a_{1n}s_1+a_{2n}s_2+\cdots+a_{mn}s_m\end{aligned}$$

现在形成 $m\times n$ 矩阵，其列为向量 $T(e_i)$相对于基 E_1 的坐标；即第 i 列($i=1,2,\cdots,n$)是$[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi}]$. 这就是表示 T 的矩阵.

基的变换(课文 5.4)

事实 5.10

设 U 是给定的线性空间，具有两个不同的基 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 与 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$. 设 u

是 U 中的向量,其相对于基 E 与 S 的坐标分别是 u_E 与 u_S. 则这些坐标与等式 $u_S = Pu_E$ 有关,其中矩阵 P 的列由坐标$[e_i]_S, i=1,2,\cdots,n$ 组成,是从基 E 到基 S 的变换矩阵.

证明

基 E 的每个元素可以用基 S 唯一地表示.特别地,

$$e_1 = a_{11}s_1 + a_{21}s_2 + \cdots + a_{n1}s_n$$
$$e_2 = a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{n2}s_n$$
$$\vdots$$
$$e_n = a_{1n}s_1 + a_{2n}s_2 + \cdots + a_{nn}s_n$$

设 u 是 U 中的向量使得 $u_E = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$;即

$$u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$$

于是

$$\begin{aligned} u &= c_1(a_{11}s_1 + \cdots + a_{n1}s_n) + c_2(a_{12}s_1 + \cdots + a_{n2}s_n) + \cdots + c_n(a_{1n}s_1 + \cdots + a_{nn}s_n) \\ &= (c_1a_{11} + \cdots + c_na_{1n})s_1 + (c_1a_{21} + \cdots + c_na_{2n})s_2 + \cdots + (c_1a_{n1} + \cdots + c_na_{nn})s_n \end{aligned}$$

这样,向量 u 相对于基 S 的坐标 u_S 等于 Pu_E,其中 P 是第 i 列($i=1,2,\cdots,n$)为$[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$的矩阵.

事实 5.11

事实 5.10 的从基 E 到基 S 的变换矩阵 P 是可逆的并且 P 的逆为 Q, Q 表示从基 S 到基 E 的变换矩阵.

证明

设 u 是 U 中的任意向量,其相对于基 E 与 S 的坐标分别是 u_E 与 u_S. 设 P 与 Q 分别表示从基 E 到基 S 及从基 S 到基 E 的变换矩阵. 于是 $u_S = Pu_E$ 及 $u_E = Qu_S$. 这样 $u_S = PQu_S$ 与 $u_E = QPu_E$. 因此 $PQ = QP = I_n$,其中 I_n 是单位矩阵. 因此, P 是可逆的.

事实 5.12

设 $T: U \to U$ 是线性变换, U 是线性空间,具有两个不同的基 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 与 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. 如果 A 是 T 相对于基 E 的矩阵表示而 B 是 T 相对于基 S 的矩阵表示,且 P 是从基 S 到基 E 的变换矩阵,则 $A = PBP^{-1}$.

证明

设 u 是 U 中的任意向量,其相对于基 E 与 S 的坐标分别是 u_E 与 u_S,并且它们由 $u_E = Pu_S$相联. 向量 $T(u)$ 相对于基 E 与 S 的坐标分别是 $A\,u_E$ 与 $B\,u_S$,并且通过 $A\,u_E = PB\,u_S$相联. 这导致 $Au_E = PBP^{-1}u_E$. 因为这对任意具有坐标 u_E 的向量 u 都成立,于是$A = PBP^{-1}$.

事实的证明 6

第六单元 特征空间

特征值与特征向量的性质(课文 6.1)

事实 6.1

设 A 是 $n\times n$ 矩阵,则由对应于 A 的特征值 λ 的特征向量生成的集 S 是一个子空间,称为与特征值 λ 相关的特征空间.

证明

我们需要验证集 S 在加法及数乘下是封闭的.设 v 与 u 是 S 中的两个向量.这导致 $Av=\lambda v$ 与 $Au=\lambda u$ 现在,

$$A(v+u)=Av+Au=\lambda v+\lambda u=\lambda(v+u)$$

因此 $v+u$ 在 S 中而 S 在加法下封闭.同样对任意的实数量 c,

$$A(cv)=cA(v)=c(\lambda v)=\lambda(cv)$$

而这导致 cv 在 S 中,因此 S 在数乘下封闭.因此,集 S 是子空间.

事实 6.2

设 $T:U\to U$ 是线性变换,U 是线性空间,具有两个不同的基 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 与 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$.如果 A 是 T 相对于基 E 的矩阵表示而 B 是 T 相对于基 S 的矩阵表示,则 A 与 B 的特征值是相等的.

证明

设 P 是从基 S 到基 E 的变换矩阵.于是矩阵 A 与 B 是相似的,且 $A=PBP^{-1}$.这样,

$$\det(\lambda I_n-A)=\det(\lambda I_n-PBP^{-1})=\det(P)\det(\lambda I_n-B)\det(P^{-1})=\det(\lambda I_n-B)$$

这导致相似矩阵 A 与 B 有同样的特征值.

矩阵对角化(课文 6.2)

事实 6.3

如果 $n\times n$ 矩阵 A 有 n 个无关的特征向量,则 A 是可对角化的.

证明

假设 A 有对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$(这些 λ 不必不同).构造列为这些特征向量的矩阵 P.明显地,P 是非奇异矩阵.计算积 AP,我们得到 $AP=PD$,其中 D 是对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵.最后一个等式导致 $P^{-1}AP=D$,因此 A 相似于对角矩阵.

事实 6.4

设 A 是 $n\times n$ 矩阵.如果 A 是可对角化的,则 A 有 n 个无关的特征向量.

证明

因为 A 是对可对角化的,于是存在非奇异矩阵 P 使得 $D=P^{-1}AP$,其中 D 是对角矩阵.设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,是对角化矩阵 A 的矩阵 P 的列,D 的对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.于是,对每个 $i=1,2,\cdots,n$,我们有 $Av_i=\lambda_i v_i$.这样,每个 $v_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 A 的特征向量.这些向量作为非奇异矩阵 P 的列必定是线性无关的.这样,矩阵 A 有 n 个无关的特征向量.

事实 6.5

如果 A 是 $n\times n$ 对称矩阵,则下列论断成立:

1. A 的特征值全是实的.
2. 对应于不同特征值的特征向量是正交的.
3. 矩阵 A 有 n 个无关的特征向量.

(2)的证明

设 v_1 与 v_2 是对应于对称矩阵 A 的两个不同特征值 λ_1 与 λ_2 的两个不同特征向量.这导致 $Av_1=\lambda_1 v_1$ 与 $Av_2=\lambda_2 v_2$.计算下列内积并且利用 A 是对称的事实($A=A^{\mathrm{T}}$):

$$\begin{aligned}\lambda_1 < v_1,v_2 > &= < \lambda_1 v_1,v_2 > = < Av_1,v_2 > = < v_1,Av_2 > \\ &= < v_1,\lambda_2 v_2 > = \lambda_2 < v_1,v_2 >\end{aligned}$$

这导致 $(\lambda_1-\lambda_2)<v_1,v_2>=0$.因为 λ_1 不等于 λ_2,于是 $<v_1,v_2>=0$.因此,对称矩阵的不同特征向量是正交的.

事实 6.6

对任意的 $n\times n$ 实对称矩阵 A,存在正交矩阵 P,其列为对应于不同特征值的特征向量,使得 $QAP=D$,其中 D 为对角元是特征值的对角矩阵,而 Q 是 P 的逆.

MapleV 与 ILAT 软件包

MapleV 是一个计算机代数系统,用于执行符号的、数值的及图形的计算. MapleV 有它自己的编程环境. 它的库有 n 个内在的软件包,为了使用某个软件包中的任何一个函数,每个都必须先初始化. 利用 MapleV 的编程环境,你可以容易地写出你自己的函数和程序、帮助文件,及库. 它是一个合适的系统来创建交互的数学文本. 我们感兴趣的是线性代数软件包. 在你处理执行任何运算之前,键入:

```
>with(linalg);
```

最常用的 Maple 命令

在这一段我们设计可能出现在介绍性的线性代数课程中的 Maple 命令与函数. MapleV 有一个在线帮助. 如果你要寻求某个专题的信息,所有你需要键入的是问题标记与文件名,例如,

```
>? solve
```

一个 Maple 输入陈述必须总是以冒号或以分号结束. 它们都执行陈述. 主要的区别在于分号显示输出而冒号不显示输出.

键入函数

一个 Maple 中的函数如下键入

```
>f:=x->x^3;
```

键入矩阵

一个 3×4 矩阵 A 如下键入

```
>A:=matrix([[1,3,4,7],[5,6,7,11],[15,1,-1,4]]);
```

如果你想选择一个值,如说是第 2 行第 3 列的值,键入

```
>A[2,3];
```

如果你想选择第 2 行,键入

```
>row(A,2);
```

如果你想选择第 3 列,键入

```
>col(A,3);
```

如果你想加或乘两个矩阵,首先键入矩阵

```
>A:=matrix([[1,3,4,7],[5,6,7,11],[15,1,-1,4]]);
 B:=matrix([[-1,0,1,2],[4,3,1,1],[6,1,1,0]]);
```

为了加,键入

```
>evalm(A+B);
```

为了乘,键入

```
>multiply(A,transpose(B));
```

为了数乘,键入

```
>evalm(4*A);
```

如果你想交换行,比如说第一行与第二行,键入

```
>swaprow(A,1,2);
```

如果你想乘一行,比如说用5乘第3行,键入

```
>mulrow(A,3,5);
```

如果你想加一行的某倍到另一行,比如说用6乘第2行然后将结果加到第3行,键入

```
>addrow(A,2,3,6);
```

一个4×1列矩阵是

```
>A:=matrix([[1],[2],[3],[-5]]);
```

你可以通过 Maple 代码产生一个矩阵,比如说一个5×7矩阵

```
>A:=matrix(5,7);
>for i from 1 to 5 do for j from 1 to 7 do
  A[i,j]:=i+j;od;od; print(A);
```

键入向量

键入向量的一种方法是

```
>v:=vector([2,3,5]);
```

如果向量所有的分量都等于某个数量 a,如说向量有5个相等的分量,你键入

```
>v:=vector(5,a);
```

如果向量的分量是用函数给出的,比如 x^2,于是你键入

```
>f:=x->x^2;
>v:=vector([f(1),f(2),f(3)]);
```

一般地,利用 Maple 代码,你可以生成任意维的向量,比如一个有5个分量的向量

```
>v:=vector(5);
>for i from 1 to 5 do v[i]=i^2; od;print(v);
```

求解

首先你键入方程然后你引用 solve 函数:

```
>eq1:=x-y=2;  eq2=2*x-4*y=11;
>solve({eq1,eq2},{x,y});
```

你可以通过键入矩阵 A 与 b,利用 linsolve 求解矩阵方程 $Ax=b$:

```
>A:=matrix([[1,2],[3,2]]);  b=matrix([[1],[3]]);
>linsolve(A,b,'r',v);
>A:=matrix([[5,7],[0,0]]);  b:=vector([3,0]);
>linsolve(A,b,'r',v);
```

绘制函数

假设你想绘制函数

```
>f:=x->sin(x);
```

你引用

```
>plot(f(x),x=0..pi);
```

plot 函数有许多选项.用它们你可以指定区域、颜色、浓度与字体.

```
>plot(f(x),x=0..pi,y=0..1,color=blue,thickness=10);
```

你也许想把几个函数的图形显示在同一坐标下.你可用下列方法之一做到这一点:

1. 键入所有的函数且利用 plot 命令:

```
>f:=x->x^2;  g:=x->exp(x);  h:=x->ln(x);
>plot({f(x),g(x),h(x)},x=1...2);
```

2. 键入一串 plot,引用软件包 with(plots);显示图形:

```
>p1:=plot(f(x),x=1...2,color:red);
>p2:=plot(g(x),x=1...2,color:bule);
>p3:=plot(h(x),x=1...2,color:green);
>with(plots);
>display({p1,p2,p3});
```

你可能感兴趣于绘制 x 与 y 的某个关系,诸如

```
>x^2+y^2=1;
>implicitplot(x^2+y^2=1,x=-1...1,y=-1...1);
```

三维版本是

```
>implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=1,x=-1...1,y=-1...1,z=0...1);
```

ILAT 软件包

我们在 MapleV 库中加了 6 个 ILAT 软件包: linsys, linmat, linspace, linpdt, lintran 与 lineign. 每个软件包由许多函数组成,每个函数有三种模式:论证程式、交互程式与无步骤程式. 在执行函数时,你可以选择你所希望的方式.

如果 MapleV 有类似的函数,我们使用了同样的名字.在处理执行一个计算前,你必须初始化与 linalg 一起的软件包.例如,如果你想使用 linsys,则你需要初始化

```
>with(linalg);with(linsys);
```

Linsys

这个软件包包含有函数 gausselim, rref, graph, solveqns 与 backsub. 为了引用 gausselim,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1]]);
>gausselim(A);
```

为了引用 rref,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1],[4,7,9]);
>rref(A);
```

为了引用 graph,键入方程然后是函数

```
>eq1:=x+2*y=1;   eq2:=-x+3*y=2;
>graph(eq1,eq2);
```

为了引用 backsub,键入阶梯形矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[0,1,1],[0,0,0]]);
>backsub(A);
```

为了引用 solveqns,键入方程然后是函数

```
>eq1:=x+2*y=1;   eq2:=-x+3*y=2;
>solveqns({eq1,eq2},{x,y});
```

所有上面的函数都可以无参数引用.例如,你可以引用

```
>gausselim( );
```

然后按 enter 键,接着键入输入.这对我们软件包中的所有函数都是对的.

linmat

这个软件包包含有函数 inverse, LUdecomp, Geometry, matrixmul, commute, trsum, trproduct, transtrans 与 trinverse.

为了引用 inverse,键入矩阵然后是函数

```
>A:=martix([[1,2,3],[3,2,1]]);
>inverse(A);
```

为了引用 LUdecomp,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1]]);
>LUdeomp(A);
```

为了引用 Geometry,键入矩阵、点集及函数

```
>S:={[1,2],[1,3],[2,3]};   A:=matrix([[1,-1],[1,0]]);
>Geometry(S,A);
```

为了引用 matrixmul,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1]]);   B:=matrix([[1],[3],[5]]);
>matrixmul(A,B);
```

为了引用 commute,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2],[2,1]]);   B:=matrix([[1,5],[6,7]]);
>commute(A,B);
```

为了引用 trsum,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,5],[7,1]]);   B:=matrix([[1,9],[6,7]]);
>trsum(A,B);
```

为了引用 trproduct,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,5],[7,1]]);   B:=matrix([[1,9],[6,7]]);
>trproduct(A,B);
```

为了引用 trinverse,键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,5],[7,1]]);
>trinverse(A);
```

linspace

这个软件包包含有函数 lincomb, lindep, subspace, graphvectadd, graphscalarmulti, graphlincomb 与 basis.

为了引用 lincomb, 键入表为一个向量集的组合的一个向量, 然后键入函数

```
>w:=vector([6,7,9]);  v1:=vector([1,2,3]);
  v2:=vector([4,-1,1]);  v3:=vector([-1,0,1]);
>lincomb(v1,v2,v3,w);
```

为了引用 lindep, 键入向量集然后是函数

```
>v1:=vector([1,2,3]);  v2:=vector([4,-1,1]);  v3:=vector([-1,0,1]);
>lindep(v1,v2,v3);
```

为了引用 subspace, 键入集 S 然后是函数

```
>S:={(x,y),x+y=0};
>subspace(S);
```

为了引用 basis, 键入向量集然后是函数

```
>v1:=vector([1,2,3]);  v2=vector([4,-1,1]);
  v3:=vector([-1,0,1]);
>basis(v1,v2,v3);
```

linpdt

这个软件包包含有函数 GramSchmidt, QRdecomp, lsqrdemo 与 leastsqrs.

为了利用 GramSchmidt, 键入向量集然后是函数

```
>v1:=vector([1,2,3]);  v2:=vector([4,-1,1]);
  v3:=vector([-1,0,1]);
>GramSchmidt(v1,v2,v3);
```

为了引用 QRdecomp, 键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[4,-1,1],[-1,0,1]]);
>QRdecomp(A);
```

为了引用 leastsqrs, 键入数据点集或者基本方程组的增广矩阵, 然后键入函数:

```
>A:=matrix([[1,2,3],[4,-1,1],[-1,0,1],[1,1,-4]]);
>leastsqrs(A);
```

lintran

这个软件包包含有函数 lineartran, kernel, range, matrixrep, changebasis 与 BaseGeometry.

为了引用 lineartran, 键入变换, 接着键入函数, 其参数是变换 T, 定义域 $\mathbb{R}^3$, 值域 $\mathbb{R}^2$.

```
>T:=x->(x[1]-x[2]),x[2]-x[3]);
>lineartran(T,R3,R2);
```

为了引用 kernel, 键入变换, 接着键入函数, 其参数是变换 T, 定义域 $\mathbb{R}^4$, 与值域 $\mathbb{R}^3$.

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2]-x[3],x[4]-2*x[1]);
>kernel(T,R4,R3);
```

为了引用 range，键入变换，接着键入函数，其参数是变换 T，定义域$\mathbb{R}^4$，值域$\mathbb{R}^3$

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2]-x[3],x[4]-2*x[1]);
>range(T,R4,R3);
```

为了引用 matrixrep，键入变换，接着键入函数，其参数是变换 T，定义域$\mathbb{R}^3$，值域$\mathbb{R}^2$

```
>T:=x->(x[1]-x[2],x[2]-x[3]);
>matrixrep(T,R3,R2);
```

为了引用 Changebasis，键入矩阵，其列为给定的基，接着键入函数：

```
>G:=matrix([[1,2],[2,1]]);  H:=matrix([[1,2],[2,5]]);
>Changebasis(T,R4,R3);
```

lineige

这个软件包包含有函数 eigenvals，eigenvects，diagonalize 与 SVdecomp.

为了引用 eigenvals，键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,0,1]]);
>eigenvals(A);
```

为了引用 eigenvects，键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,0,1]]);
>eigenvects(A);
```

为了引用 diagonalize，键入矩阵然后是函数

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,0,1]]);
>diagonalize(A);
```

为了引用 SVdeomp，键入矩阵然后是函数，

```
>A:=matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,0,1]]);
>SVdecomp(A);
```

利用 Maple 函数代替 ILAT 函数

MapleV 与 ILAT 函数分配了同样的名字，当它在 MapleV 与 ILAT 中都是可用时，如果你想使用来自 MapleV 中 linalg 软件包的函数来代替 ILAT 函数，如下键入 gausselim

```
>linalg[gausseilm](A);
```

一般地，你键入

```
>linalg[函数名](参数);
```

参考书目

Anton, Howard. *Elementary Linear Algebra*, Seventh Edition, John Wiley & Sons, New York, 1994

Bauldry, C, William. *Linear Algebra with Maple*, John Wiley & Sons, New York, 1995

Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*, Random House, New York 1988

Evans, Benny, and Johnson, Jerry. *Linear Algebra with Derive*, John Wiley & Sons, New York, 1994

Grossman, I. Stanley. *Elementary Linear Algebra*, Fifth Edition, Saunders, New York, 1994

Horn A., Roger and Johnson, Charles R. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

Johnson, Eugene. *Linear Algebra with Maple*, Brooks/Cole, Pacific Grove, Calif. 1993

LayC., David. *Linear Algebra and Its Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994

Michael, T. S. The ranks of tournament matrices, *American Mathematical Monthly*, Volume 102, Number 7(1995), 637-639

Porter, Gerald J. and Hill, David R., *Introduction to Linesr Algebra, A Laboratory Course Using MATHCAD*, Springer-Verlag, New York, 1996

Strang, Cilbert. *linear Algebra Algebra and Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1988

Tucker, Alan. *Linear Algebra, An Introduction to the Theory and Use of Vectors and Matrices*, Macmillan Publishing Company, New York, 1993

Tucker, Alan. *A Unified Introduction to Linear Algebra: Models, Methods, and Theory*, Macmillan, New York, 1988

Williams, Gareth. *Linear Algebra with Applications*, Second Edition, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1991

中英文词汇对照

A

Accessibility matrix 邻接矩阵
Additive identity 加法单位元
Additive inverse 加法逆
Adjoint method 伴随算法
Airline connection problem 航线连接问题
Algebraic multiplicity 代数重数
Algorithms 算法
  adjoint method 伴随算法
  backsubstitution 回代
  Gauss elimination 高斯消元法
  Gauss-Jordan 高斯－若尔当
  Gram-Schmidt 格拉姆－施密特
  LU-decomposition LU－分解
  QR-decomposition QR－分解
  SVD-decomposition, see ILAT software SVD－分解,见 ILAT 软件包
Angle 角
Approximate solution 近似解
Associative property 结合律
  of addition 加法
  for multiplication 乘法
Augmented matrix 增广矩阵
Automata theory 自动机理论

B

Back propagation 向后传播
Backsustitution 回代
Basegeometry 基的几何表示
Basis 基
  change of 基变换
  coordinates relative to 关于基的坐标
  examples 例子
  for eigenspace 特征空间
  orthogonal 正交
  orthonormal 规范正交基
  standard 标准

C

Cauchy-Schwartz inequality 柯西－施瓦茨不等式
Cell production 细胞的产生
Change of basis 基变换
Characteristic polynomial 特征多项式
Chemical reaction 化学反应
Circulant matrices 循环矩阵
Closed under 在～下封闭
  addition 加法
  multiplication 乘法
Coefficient matrix 系数矩阵
Column 列
  rank 列秩
  space 列空间
Combination, linear 线性组合
Commute 交换
Commutative property 交换律
  addition 加法
  multiplication 乘法
Complement, orthogonal 正交补
Complex conjugate 复共轭
Concentration of CO_2 CO_2 的浓度
Consistent system 相容方程组
Coordinate vector 坐标向量
Cramer's rule 克拉默法则

Cryptography 密码学

D

Decomposition 分解
  LU LU-分解
  QR QR-分解
  SVD, see ILAT software SVD-分解. 见 ILAT 软件包
Defective matrix 瑕矩阵
Determinant 行列式
  properties 行列式的性质
Diagonal matrix 对角阵
Diagonalizable 可对角化的
Diagonalization 对角化
Dimension(s) 维数
Dimension theorem 维数论
Discrete systems 离散系统
Distance between a point and
  a plane 点到一平面的距离
Diatributive property 分配律
Dot product 点积

E

Echelon form 梯形
  reduced 简化
Ecological model 生态模型
Eigenspace(s) 特征空间
Eigenvalues 特征值
  algebraic multiplicity 代数重数
  geometric multiplicity 几何重数
Eigenvectors 特征向量
Elementary matrices 初等矩阵
Elementary row operations 初等行变换
Encoding matrix 密码矩阵
Equal matrices 相等矩阵
Equal vectors 相等向量
Equation(s) 方程(组)
  consistent 相容
  normal 标准方程
  plane 平面方程
  polynomial 多项式
Equivalence class 等价类
Equivalent systems 等价系统
Exponential matrix 指数矩阵

F

Fact(s) 事实
Finite dimension 有限维
Finite state machine 有限状态机
Free variable(s) 自由变量

G

Gauss elimination 高斯消元法
Gauss-Jordan algorithm 高斯-若尔当算法
Gauss-Siedel 高斯-塞德尔
Geometric multiplicity 几何重数
Gram-Schmidt method 格拉姆-施密特方法
Graph theory 图论

H

Hermitian matrices 埃尔米特阵
Hilbert matrices 希尔伯特阵
Homogeneous system 齐次线性方程组

I

Idempotent matrix 幂矩阵
Identity matrix 单位矩阵
Image 象
Inconsistent system 不相容方程组
Inner product 内积
Inner product spaces 内积空间
Intersection 交
Inverse of a matrix 矩阵的逆
Invertible 可逆
Invertible linear transformation 可逆线性变换
Invertible matrices 可逆矩阵

J

Jacobi method 雅可比方法

K

Kernel 核
  properties 核的性质

L

Laplace expansion 拉普拉斯展开
Least squares 最小平方
  approximation 近似

graphical demonstration 图示
method 方法
polynomial 多项式
Legendre polynomial 勒让德多项式
Length of a vector 向量的长度
Linear combination(s) 线性组合
Linear dependent 线性相关
Linear equation 线性方程
Linear independent 线性无关
Linear normed spaces 线性赋范空间
Linear spaces 线性空间
Linear transformation(s) 线性变换
kernel 核
matrix representation 矩阵表示
nullity 零化度
properties 性质
range 值域
rank 秩
Lower triangular matrix 下三角矩阵
LU decomposition LU－分解

M

Management science 管理科学
Mathematical modeling 数学模型
Matrix 矩阵
accessibility 邻接矩阵
addition 加法
adjoint 伴随
augmented 增广
circulant 循环
coefficient 系数
cofactor 余子式
defective 瑕矩阵
diagonal 对角
diagonalizable 可对角化
echelon form of 梯形
elementary 初等
equal 相等
exponential 指数
hermitian 埃尔米特
Hilbert 希尔伯特
identity 单位
indefinite 不定
inverse 逆
lower triangular 下三角
multiplication of 乘法
negative definite 负定
nonsingular 非奇异
null space of 零空间
matrix of a linear 线性矩阵
transformation 变换
orthogonal 正交
positive definite 正定
in reduced echelon form 简化阶梯形
representation 表示
in row echelon form 行阶梯形
row equivalent 行等价～
similar 相似
singular 奇异
symmetric 对称
tournament 竞赛
trace of a 迹
transition 转移
transpose 转置
triangular 三角
unitary 酉
upper triangular 上三角
zero 零
Minimal spanning set 极小生成集
Minor 子式
Mutiplicative identity 乘法单位元

N

Negative definite 负定
Neural network 神经网络
Nonhomogeneous system 非齐次线性方程组
Nonsingular matrix 非奇异矩阵
Norm 范
Normal equations 正规方程
Normed linear spaces 赋范线性空间
Null space 零空间
Nullity 零维
Nutrityon 营养学

O

Oil refinery 炼油
One-to-one 1－1 的
Orthogonal basis 正交基

Triangular matrix 三角矩阵
Trigonometric polynomials 三角多项式
Trivial solution 平凡解

U

Underdetermined linear system 不足线性方程组
Unique solution 唯一解
Union 并
Unit vector 单位向量
Unitary matrices 酉矩阵
Upper triangular matrix 上三角阵

V

Variables 变量
  free 自由～
  leading 首～
Vector 向量
  addition 加法
  closest point 最近的点
  definition 定义
  equality 等式
  length 长度
  linearly independent 线性无关
  orthogonal 正交
  scalar multiplication 数量积
Vector addition 向量的加法
Vector space 向量空间

W

Warehouse problem 仓库问题
Weights 权重
Wronskian 朗斯基

Z

Zero matrix 零矩阵
Zero vector 零向量