第　四　章

谱分析基础
与快速傅立叶变换

§ 连续信号及其频谱

一 周期信号及其频

$$f(t) = f(t+nT) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ 谐波

$\omega_k = k\,\omega_0 \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ 基频

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(\mathrm{i}\,\omega_k t)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_k t\,\mathrm{d}t \\ b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_k t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(-\mathrm{i}\,\omega_k t)\,\mathrm{d}t \\ c_{-k} = c_k^{*} \end{cases}$$

二 非周期信号及其频谱

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}$$

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}f(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$1/T\to \mathrm{d}\omega/2\pi$

$\omega_k\to\omega$

令 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u$

则 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$x(t)\underset{IFT}{\overset{FT}{\longleftrightarrow}}X(\omega)$$

若 $\omega=2\pi f$ f 线频率

则
$$\begin{cases}X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t\\ x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f\end{cases}$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

若 $x(t) = x_r(t) + \mathrm{i}\, x_i(t)$

则
$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x_r(t)\cos\omega t + x_i(t)\sin\omega t]\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} [x_i(t)\cos\omega t - x_r(t)\sin\omega t]\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Re}(\omega) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\omega)
\end{aligned}
$$

$$
|X(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}
$$

若$x(t)$为实函数 即 $x(t) = x_r(t)$

则
$$
\begin{cases}
\mathrm{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_r(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{Im}(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x_r(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
X(-\omega) &= \mathrm{Re}(-\omega) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(-\omega) \\
&= \mathrm{Re}(\omega) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\omega) \\
&= X^*(\omega)
\end{aligned}
$$

实信号的傅立叶变换共轭等于其傅立叶变换的翻转

三　傅立叶变换的性质

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

1.　线性叠加

$$\sum a_k x_k(t) \longleftrightarrow \sum a_k X_k(\omega)$$

2.　时移定理

$$x(t \pm t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t_0} X(\omega)$$

3.　频移定理

$$x(t)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega \mp \omega_0)$$

$$x(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)]$$

4.　对称定理

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

$$X(-t) \longleftrightarrow 2\pi x(\omega)$$

5. 标度定理

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

6. 微分定理

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d} t^n} \longleftrightarrow (\mathrm{i}\omega)^n X(\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n X(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n} \longleftrightarrow (-\mathrm{i}t)^n x(t)$$

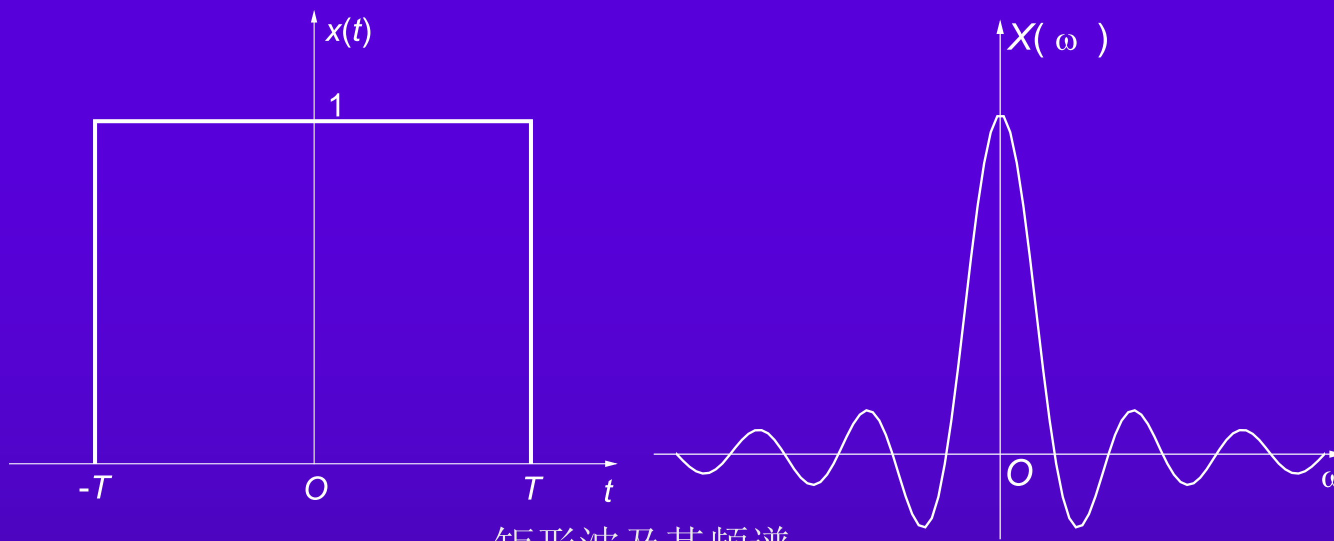
四 几个常用函数的傅立叶变换

1. 矩形函数（方波）

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$\updownarrow$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$



矩形波及其频谱

2. 傅立叶核 $\frac{\sin at}{\pi t}$

$$\frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1 & |\omega| \le a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

3. 三角波

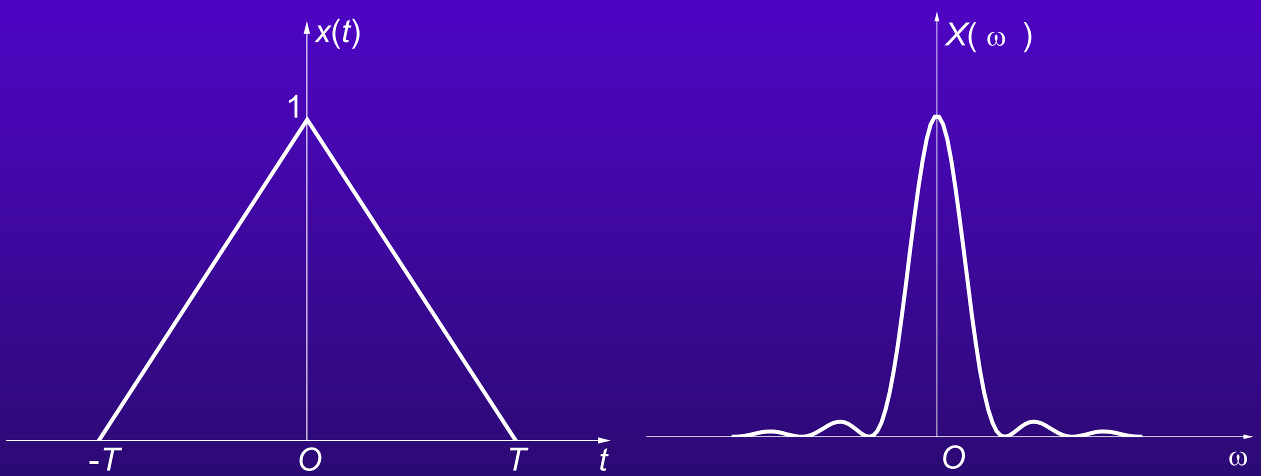
$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

$$X(\omega)=\int_{-T}^{T}(1-\frac{|t|}{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{-T}^{0}\frac{t}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{T}\frac{t}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

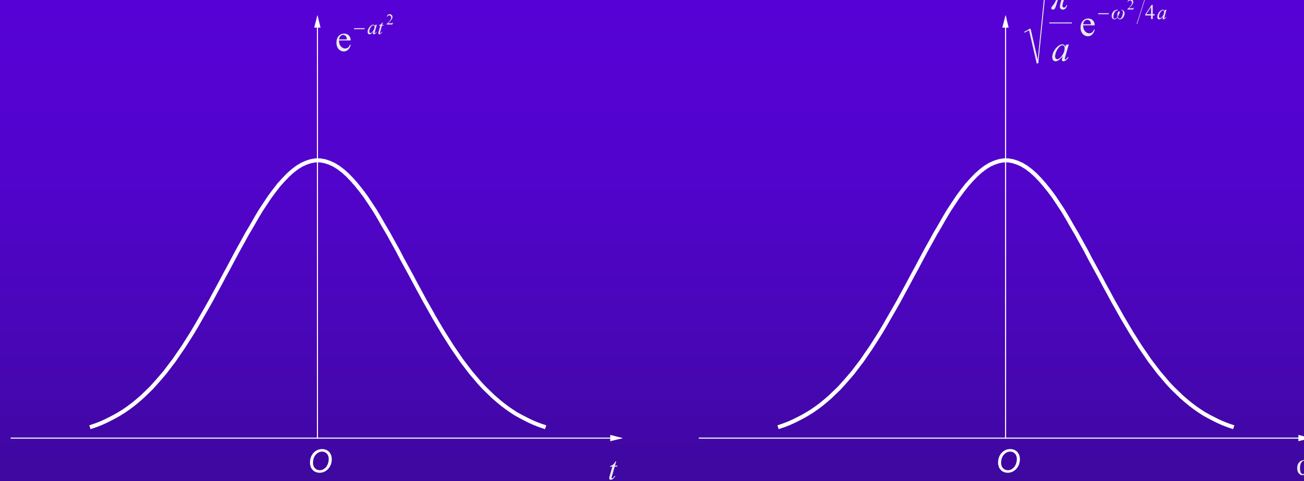
$$=\frac{T\sin^{2}(\omega T/2)}{(\omega T/2)^{2}}$$



三角波及其频谱

4. 高斯函数

$$e^{-at^2} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$$



高斯函数及其频谱

§ δ 函数（冲激函数 脉冲函数）

一 δ 函数的定义

1. 从函数序列极限定义

$$x_n(t)=\begin{cases} n & |t|\le 1/2n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\delta(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t\ne 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty & t=t_0 \\ 0 & t\ne t_0 \end{cases}$$

2. 从广义函数定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\varphi(t_0)$$

3. 从普通函数的广义极限定义

$$\delta(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin at}{\pi t}$$

二 δ函数的性质

1. δ函数的傅立叶变换

$$\delta(t)\longleftrightarrow 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0}=1$$

时延δ函数 $\delta(t-t_0)\longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$

对称定理 $1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$\Downarrow$ 线性叠加定理

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\longleftrightarrow \mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

2. δ函数的导数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\varphi'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

⇓ $\varphi(t)$的k阶导数在$t=t_0$处连续

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t-t_0)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k \varphi^{(k)}(t_0)$$

3. δ函数与普通函数的乘积

$f(t)$在$t=0$时连续　　$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

$f(t)$在$t=t_0$时连续　　$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

二　周期脉冲链（等距脉冲序列）

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

1. $$\delta_T(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

记 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi c_k\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$

则
$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{T}$$

2.
$$x_T(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)$$
$$=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

§ 卷积（褶积）

一 定义

函数 $f(t)$ $g(t)$ $-\infty < t < \infty$

若 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

记 $y(t) = f(t) * g(t)$

运算关系式 $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$

二 性质

1. 卷积定理

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$

则 $f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$ 时间卷积定理

$f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$ 频率卷积定理

证：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)*g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=F(\omega)\cdot G(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{d}\omega'\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega'')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'' t}\mathrm{d}\omega''\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega'')\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'+\omega''-\omega')t}\mathrm{d}t\right]\cdot\mathrm{d}\omega''\right\}\cdot\mathrm{d}\omega'$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega'')\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega'-\omega'')\cdot\mathrm{d}\omega''\right\}\cdot\mathrm{d}\omega'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')G(\omega-\omega')\mathrm{d}\omega'$$

$$=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$$

2. 卷积的导数

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$

则 $[f(t)*g(t)]' = f'(t)*g(t) = f(t)*g'(t)$

$$\longleftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega)\cdot G(\omega)$$

证：由微分定理有

$$f'(t) \longleftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega) \quad g'(t) \longleftrightarrow \mathrm{i}\omega G(\omega)$$

故 $f'(t)*g(t) \longleftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega)\cdot G(\omega)$

$$f(t)*g'(t) \longleftrightarrow F(\omega)\cdot \mathrm{i}\omega G(\omega)$$

又 $[f(t)*g(t)]' \longleftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega)\cdot G(\omega)$

从而有

$$[f(t)*g(t)]' = f'(t)*g(t) = f(t)*g'(t)$$

$$\longleftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega)\cdot G(\omega)$$

3. 和δ函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot\delta(t-t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t-t_0)$$

4. 和周期脉冲链的卷积

$$f(t)*\delta_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT)$$

5. 和矩形函数的卷积

$$g(t)=\begin{cases}1 & |t|\le 1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

6. 和δ函数导数的卷积

$$f(t)*\delta'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot\delta'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=-\int_{-\infty}^{\infty}f'(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f'(t)$$

三 帕斯卡定理

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$

则 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{d} t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) G(\omega) \mathrm{d} \omega$$

证：

$$f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v-\omega) G(\omega) \mathrm{d} \omega$$

即 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} v t} \mathrm{d} t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v-\omega) G(\omega) \mathrm{d} \omega$$

令 $v = 0$

则 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{d} t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) G(\omega) \mathrm{d} \omega$$

若$f(t)$和$g(t)$为实函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{d} t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) G(\omega) \mathrm{d} \omega$$

若$f(t) = g(t)$，则$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d} t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) \mathrm{d} \omega$ $A^2(\omega)$ 能谱

四 意义

观测天体图像＝天体真图像＊望远镜光学传递函数

观测谱线轮廓＝天体谱线轮廓＊仪器轮廓

例：周期函数的傅立叶变换

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\qquad \omega_0=2\pi/T$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

非周期函数 $$f_0(t)=\begin{cases} f(t) & |t|\le T/2 \\ 0 & |t|>T/2 \end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_0(t+nT)=f_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$F(\omega)=F_0(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F_0(k\omega_0)}{T}\delta(\omega-k\omega_0)$$

§ 离散傅立叶变换（DFT）

一 采样定理

信号$x(t)$以时间间隔Δ进行采样，得到

$$x_\Delta(n) = x(t) \cdot \sum \delta(t-n\Delta)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$X_\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{\Delta} \sum_m \delta(\omega - m\omega_p)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_m X(\omega - m\omega_p)$$

采样定理 若$x(t)$的频谱$X(\omega)$和采样间隔Δ满足

1) $X(\omega)=0 \quad \omega \geq \omega_c$ ⟹ 有限带宽

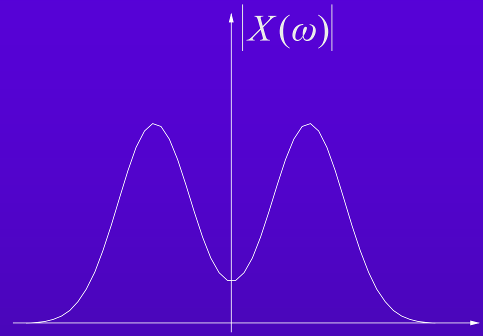
2) $\Delta \leq \pi/\omega_c$

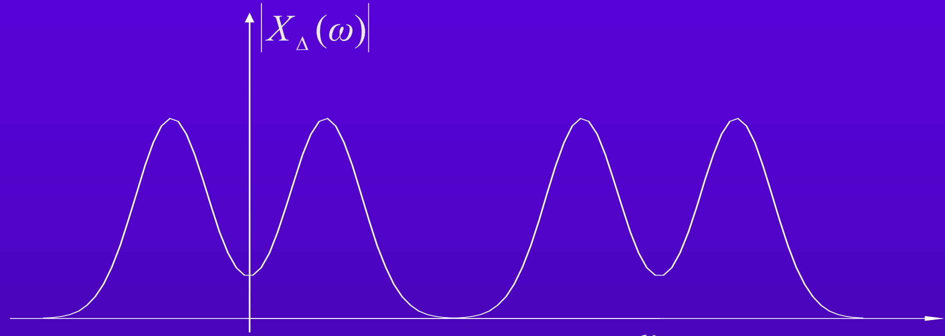
则离散信号$\{x(n\Delta)\}$可确定频谱$X(\omega)$，并可复原信号$x(t)$

ω_c截止频率

$$x(t)=\sum_n x(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}$$

冲激响应





有限带宽信号$x(t)$ $\begin{cases}\omega_p \ge 2\omega_c & \Delta \le \pi/\omega_c \\ \omega_p < 2\omega_c & \Delta > \pi/\omega_c\end{cases}$ 频谱混叠

非有限带宽信号$x(t)$ 出现频谱混叠

$\Delta\downarrow$ $\omega_p\uparrow$ 减少混叠部分

$\omega_N=\frac{\pi}{\Delta}$ 奈奎斯特(*Nyquist*)频率

二 离散傅立叶变换（**DFT**）

1. 周期序列的傅立叶级数(**DFS**)

$$f_\Delta(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$F_\Delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\frac{2\pi}{\Delta}\sum_m\delta(\omega-m\omega_p)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\sum_m F(\omega-m\omega_p)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\sum_m F[(k-mN)\omega_0]$$

$$\omega=k\omega_0$$

$$\omega_p=2\pi/\Delta=N\cdot 2\pi/T=N\omega_0$$

$$f_\Delta(n\Delta)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_\Delta(k\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega_0 n\Delta}=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_\Delta(k\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n(k+lN)/N}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nl}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

$$f_\Delta(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_\Delta(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

同理

$$F_\Delta(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f_\Delta(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

2. 有限离散傅立叶变换

$$x(n)\xrightarrow{\text{周期延拓}} x((n))_N$$

$$x((n))_N \xleftrightarrow{DFS} X((k))_N$$

$$X(k)=X((K))_N\cdot R_N(k)$$

$$R_N(k)=\begin{cases}1 & 0\le k\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nk/N}\qquad 0\le k\le N-1$$

同样 $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}\qquad 0\le n\le N-1$$

三 DFT应用中的若干问题

1. 混叠效应

$$x(t) \xrightarrow{\Delta} x(m)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$X(\omega) \qquad X_0(\omega) = \frac{1}{\Delta}\sum X(\omega - m\omega_p)$$

$$\Delta \le \frac{\pi}{\omega_c}$$

2. 截断效应(泄漏效应)

$$y(t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$x(t) \quad -T < t < T$$

$$x(t) = y(t)\cdot w(t)$$

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*W(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\lambda)W(\omega-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\lambda)\frac{2\sin[(\omega-\lambda)T]}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-T/2}Y(\lambda)\frac{\sin[(\omega-\lambda)T]}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2}Y(\lambda)\frac{\sin[(\omega-\lambda)T]}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{T/2}^{\infty}Y(\lambda)\frac{\sin[(\omega-\lambda)T]}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

例：

$$y(t)=1 \quad -\infty<t<\infty$$

$$x(t)=1 \qquad |t|<T$$

$$Y(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*W(\omega)=\frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

例：

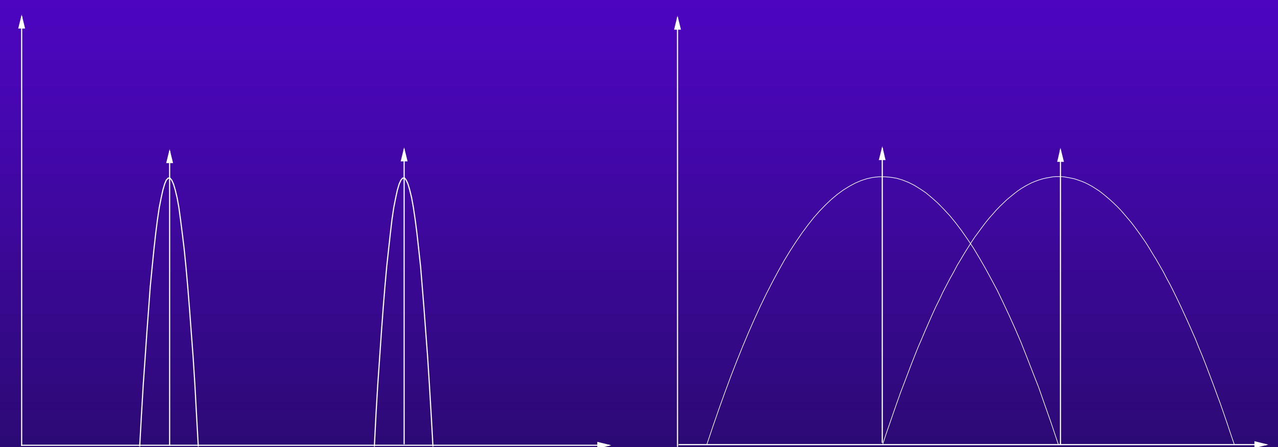
$$y(t)=\cos\pi at \quad -\infty<t<\infty$$

$$x(t)=\cos\pi at \quad -T<t<T$$

$$Y(\omega)=\pi[\delta(\omega-\pi a)+\delta(\omega+\pi a)]$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*W(\omega)=\frac{\sin(\omega-\pi a)T}{\omega-\pi a}+\frac{\sin(\omega+\pi a)T}{\omega+\pi a}$$

$$2\pi a>\frac{\pi}{T} \quad T>\frac{1}{2a} \qquad\qquad 2\pi a<\frac{\pi}{T} \quad T<\frac{1}{2a}$$



利用平滑窗对泄漏效应进行抑制

3. DFT应用中参数的选择

$$\Delta \le \frac{\pi}{\omega_c} \qquad \frac{1}{2f_c}$$

频率上限 $f_c = f_N = \dfrac{1}{2\Delta}$

频率下限 $f_0 = \dfrac{1}{T}$

频率分辨率 $\Delta f = f_0 = \dfrac{1}{T}$

采样间隔 $\Delta t \doteq (\dfrac{1}{4} \sim \dfrac{1}{6})\dfrac{1}{f_c}$

§ 序列的卷积和相关

一 线性卷积与循环卷积

1. 线性卷积

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

序列 $x(n)$ $h(n)$ $-\infty<n<\infty$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

线性卷积
直接卷积

有限长序列 $x(n)$ $0\le n\le N-1$

$h(n)$ $0\le n\le M-1$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)h(n-k)\quad 0\le n\le N+M-2$$

例：求序列$\{x(n)\}=\{1,1,3,2\}$和$\{h(n)\}=\{2,3,4,2,5,1\}$的线性卷积。

$$y(0)=x(0)h(0)=2$$

$$y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)=5$$

$$y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=13$$

$$y(3)=x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)=19$$

$$y(4)=x(0)h(4)+x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1)=25$$

$$y(5)=x(0)h(5)+x(1)h(4)+x(2)h(3)+x(3)h(2)=20$$

$$y(6)=x(1)h(5)+x(2)h(4)+x(3)h(3)=20$$

$$y(7)=x(2)h(5)+x(3)h(4)=13$$

$$y(8)=x(3)h(5)=2$$

$$\{x(n)*h(n)\}=\{2,5,13,19,25,20,20,13,2\}$$

2. 周期卷积

周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ $\tilde{x}_2(n)$ $0 < n < N-1$

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1(k)\tilde{x}_2(n-k) = \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)$$ 周期卷积

$$\tilde{y}(0) = \tilde{x}_1(0)\tilde{x}_2(0) + \tilde{x}_1(1)\tilde{x}_2(-1) + \cdots + \tilde{x}_1(N-1)\tilde{x}_2(-N+1)$$

$$= \tilde{x}_1(0)\tilde{x}_2(0) + \tilde{x}_1(1)\tilde{x}_2(N-1) + \cdots + \tilde{x}_1(N-1)\tilde{x}_2(1)$$

$$\tilde{y}(n) = \tilde{y}(n+N)$$

3. 循环卷积

序列 $x_1(n)$ $0 \le n \le N-1$

$x_2(n)$ $0 \le n \le N-1$

周期延拓 $x_1((n))_N$ $x_2((n))_N$

$$y^c(n) = x_1((n))_N * x_2((n))_N$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_1((k))_N x_2((n-k))_N$$

$$= x_1(n) \textcircled{N} x_2(n)$$

$$y(0)=x_1(0)x_2(0)+x_1(1)x_2(-1)+\cdots+x_1(N-1)x_2(-N+1)$$

$$y(1)=x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)+\cdots+x_1(N-1)x_2(-N+2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$y(N-1)=x_1(0)x_2(N-1)+x_1(1)x_2(N-2)+\cdots+x_1(N-1)x_2(0)$$

以矩阵的形式表示

$$\begin{pmatrix} y^c(0) \\ y^c(1) \\ \vdots \\ y^c(N-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(2) \\ & & \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ \vdots \\ x_1(N-1) \end{pmatrix}$$

例：求$\{x_1(n)\}=\{1,1,1,1\}$和$\{x_2(n)\}=\{1,1,1,1\}$的线性卷积与循环卷积。

$$\{x_1(n)*x_2(n)\}=\{1,2,3,4,3,2,1\}$$

$$\{x_1(n) \; Ⓝ \; x_2(n)\}=\{4,4,4,4\}$$

序列长度不同，补零延拓

$\{x_1'(n)\} = \{1,1,1,1,0,0,0\} \quad \{x_2'(n)\} = \{1,1,1,1,0,0,0\}$

$\{x_1'(n) \boxed{2N-1} x_2'(n)\} = \{1,2,3,4,3,2,1\}$

$\{x_1(n) * x_2(n)\} = \{x_1'(n) \boxed{2N-1} x_2'(n)\}$

4. 时域循环卷积定理

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) \quad 0 \le n \le N-1$$

$$h(n) \xleftrightarrow{DFT} H(k) \quad 0 \le k \le N-1$$

则 $x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) \cdot H(k)$

证：

记 $G(k) = X(k) \cdot H(k)$

则 $G((k))_N = X((k))_N \cdot H((k))_N$

设 $g((n))_N \xleftrightarrow{DFS} G((k))_N$

则 $$g((n))_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G((k))_N \, e^{i2\pi nk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N \, e^{-i2\pi mk/N}]\cdot[\sum_{l=0}^{N-1} h((l))_N \, e^{-i2\pi lk/N}]e^{i2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N \{\sum_{l=0}^{N-1} h((l))_N [\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi(n-m-l)k/N}]\}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x((m))_N \, h((n-m))_N$$

即 $$g(n) = x(h) \, \textcircled{N} \, h(n)$$

5. 频域循环卷积定理

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) \quad 0 \le n \le N-1$$

$$h(n) \xleftrightarrow{DFT} H(k) \quad 0 \le k \le N-1$$

则 $$\frac{1}{N} X(k) \, \textcircled{N} \, H(k) \xleftrightarrow{DFT} x_1(n)\cdot x_2(n)$$

证： 记 $g(n)=x(n)\cdot h(n)$

则 $g((n))_N = x((n))_N \cdot h((n))_N$

设 $G((k))_N \xleftrightarrow{DFS} g((n))_N$

则 $$G((k))_N = \sum_{n=0}^{N-1} g((n))_N \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X((m))_N \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}}\right]\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} h((l))_N \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi lk}{N}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nk}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X((m))_N \left\{\sum_{l=0}^{N-1} H((l))_N \left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(m+l-n)k/N}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X((m))_N \, H((n-m))_N$$

即 $$G(k) = \frac{1}{N} X(k) \textcircled{N} H(k)$$

二 线性相关与循环相关

$$\rho_{xy}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[X(t_1),X(t_2)]=\begin{cases}R_{XX}(t_2-t_1) & \text{平稳过程}\\ \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1),Y(t_2)]$$

$$\gamma_{xy}(k)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n-=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+k)$$

$$\gamma_{x}(k)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n-=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+k)$$ 无限长序列

$$\gamma_{x}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}x(n)x(n+k)$$ 线性相关 有限长序列

谱分析基础与快速傅立叶变换

$$x((n))_N \quad x(n)=x(n\pm N)=x(n\pm 2N)=\cdots$$

$$y((n))_N \quad y(n)=y(n\pm N)=y(n\pm 2N)=\cdots$$

$$\gamma_{xy}^{c}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n+k)$$ 循环互相关

定理　设$x(n)\longleftrightarrow X(k)$，$y(n)\longleftrightarrow Y(k)$（$n,k=0\sim N-1$），

则$\frac{1}{N}X(k)Y^*(k)$的逆DFT等于$\gamma_{xy}^{c}(p)$，即

$$\gamma_{xy}^{c}(p)=\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kp}{N}} \qquad p=0\sim N-1$$

证：

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kp}{N}}=\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kn}{N}}][\sum_{l=0}^{N-1}y(l)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kl}{N}}]\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kp}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sum_{l=0}^{N-1}y(l)[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k(l+p-n)}{N}}]$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi k(l+p-n)}{N}} = \begin{cases} 1 & l+p-n = vN \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad v = 0,1$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)e^{\frac{i2\pi kp}{N}} = \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-p-1} x(l+p)y(l) + \sum_{l=N-p}^{N-1} x(l+p-N)y(l)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-p-1} x(l+p)y(l) + \sum_{l=N-p}^{N-1} x(l+p)y(l)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l+p)y(l)$$

$$= \gamma_{xy}^{c}(p)$$

$$\gamma_{xy}^{c}(p) = \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-p-1} x(l+p)y(l) + \sum_{l=N-p}^{N-1} x(l+p)y(l)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-p-1} x(l+p)y(l) + \sum_{k=0}^{p-1} x(k)y(k+N-p)\right]$$

$$= \gamma_{yx}(p) + \gamma_{xy}(N-p)$$

定理 设$X(k)$为离散信号$x(n)$的有限傅立叶变换，则$\frac{1}{N}\left|X(k)\right|^2$的逆$DFT$等于$\gamma^c(p)$，即

$$\gamma^c(p)=\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kp}{N}}$$

且循环自相关函数和线性自相关函数之间的关系为

$$\gamma^c(p)=\gamma(p)+\gamma(N-p)\qquad p=0\sim N-1$$

$$\left.\begin{matrix} x(n)\xrightarrow{\text{补}N\text{个零}}x'(n) \\ y(n)\xrightarrow{\text{补}N\text{个零}}y'(n)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\gamma_{x'y'}(n) \\ \gamma_{x'x'}(n)\end{matrix}\xrightarrow{\text{取前}N\text{个值}}\begin{matrix}\gamma_{xy}(n) \\ \gamma_{xx}(n)\end{matrix}$$

§ 快速傅立叶变换（FFT）

DFT的快速算法——Cooly & Tukey (1965)

一 FFT的基本原理及递推公式

$$N = 2^M$$

利用 $W_N = e^{-i2\pi/N}$ 的性质：周期性 $W_N^r = W_N^{r+mN}$

对称性 $W_N^r = -W_N^{(r \pm N/2)}$

$$x(n) \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$\begin{cases} x(2l) = g(l) \quad \longleftrightarrow \quad G(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g(l) W_{N/2}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} \\ x(2l+1) = h(l) \quad \longleftrightarrow \quad H(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} h(l) W_{N/2}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{2lk} \end{cases}$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_N^{2lk}+\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_N^{(2l+1)k}$$

$$=G(k)+H(k)W_N^{k}$$

又 $G(k)=G(k+\frac{N}{2})\quad H(k)=H(k+\frac{N}{2})$

$$X(k+\frac{N}{2})=G(k+\frac{N}{2})+H(k+\frac{N}{2})W_N^{k+\frac{N}{2}}$$

$$=G(k)-H(k)W_N^{k}$$

$$\begin{cases}X(k)=G(k)+H(k)W_N^{k}\\ X(k+\frac{N}{2})=G(k)-H(k)W_N^{k}\end{cases}\qquad k=0\sim\frac{N}{2}-1$$

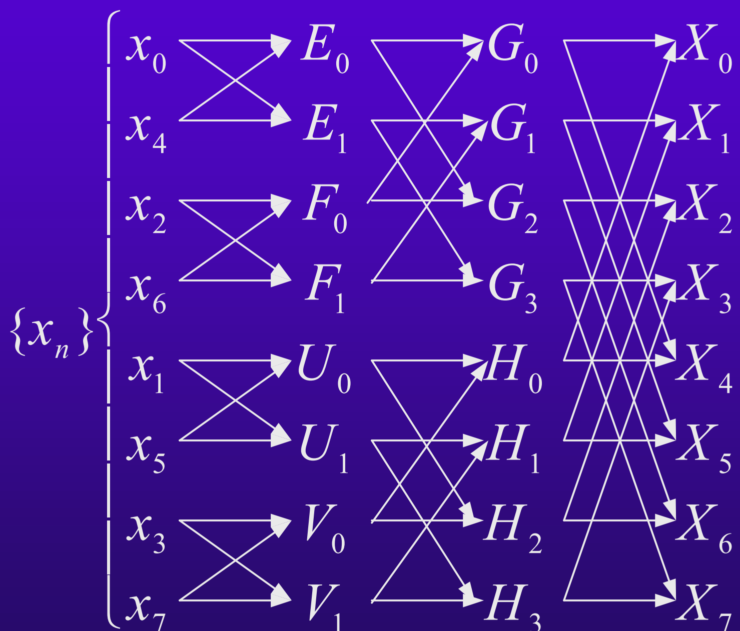
例：以$N=8=2^3$为例说明上述的分解组合过程。

$$x(n)=\begin{cases} g(l)=\begin{cases} g(0)=x(0) \\ g(1)=x(2) \\ g(2)=x(4) \\ g(3)=x(6) \end{cases} & \begin{cases} e(l)=\begin{cases} e(0)=x(0) \\ e(1)=x(4) \end{cases} \\ f(l)=\begin{cases} f(0)=x(2) \\ f(1)=x(6) \end{cases} \end{cases} \\ h(l)=\begin{cases} h(0)=x(1) \\ h(1)=x(3) \\ h(2)=x(5) \\ h(3)=x(7) \end{cases} & \begin{cases} u(l)=\begin{cases} u(0)=x(1) \\ u(1)=x(5) \end{cases} \\ v(l)=\begin{cases} v(0)=x(3) \\ v(1)=x(7) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(k)=\sum_{l=0}^{1} e(l)W_{N/4}^{lk}=\sum_{l=0}^{1} e(l)W_N^{4lk} \\ F(k)=\sum_{l=0}^{1} f(l)W_N^{4lk} \\ U(k)=\sum_{l=0}^{1} u(l)W_N^{4lk} \\ V(k)=\sum_{l=0}^{1} v(l)W_N^{4lk} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
G(k) = E(k) + F(k)W_N^{2k} \\
G(k+\frac{N}{4}) = E(k) - F(k)W_N^{2k} \\
H(k) = U(k) + V(k)W_N^{2k} \\
H(k+\frac{N}{4}) = U(k) - V(k)W_N^{2k}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
X(k) = G(k) + H(k)W_N^{k} \\
X(k+\frac{N}{2}) = G(k) - H(k)W_N^{k}
\end{cases}
$$



特性: 1. 码位倒置

以二进制表示原序列的序号

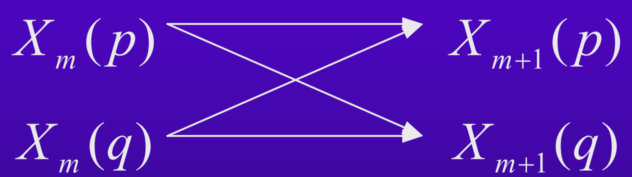
000 001 010 011 100 101 110 111

以二进制表示分解后的序列序号

000 100 010 110 001 101 011 111

2. 节省内存空间

3. 蝶形计算流程图



$$\begin{cases} X_{m+1}(p) = X_m(p) + X_m(q)W_N^r \\ X_{m+1}(q) = X_m(p) - X_m(q)W_N^r \end{cases} \quad r = N \cdot J/2^{m+1} \quad J = 0 \sim 2^m - 1$$

对偶结点q, p $\quad q - p = 2^m \quad m = 0 \sim M+1 \quad M = \log_2 N$

$$p = I \cdot 2^{m+1} + J \quad I = 0 \sim 2^{M-m-1}$$

二 实序列的FFT

1. 一次FFT同时计算两个实序列的DFT

$$x_1(n) \longleftrightarrow X_1(k) \quad x_2(n) \longleftrightarrow X_2(k)$$

$$x(n) = x_1(n) + \mathrm{i}\, x_2(n)$$

$$\longleftrightarrow X(k) = X_1(k) + \mathrm{i}\, X_2(k)$$

$$X(N-k) = X_1(N-k) + \mathrm{i}\, X_2(N-k)$$

$$X^*(N-k) = X_1(k) - \mathrm{i}\, X_2(k)$$

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$= \frac{1}{2}[X_r(k) + X_r(N-k)] + \mathrm{i}\frac{1}{2}[X_i(k) - X_i(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[X(k) - X^*(N-k)]$$

$$= \frac{1}{2}[X_i(k) + X_i(N-k)] - \mathrm{i}\frac{1}{2}[X_r(k) - X_r(N-k)]$$

2. 利用N点的FFT计算2N点实序列的DFT

$$x(n) \longleftrightarrow X(k) \quad k,n = 0 \sim 2N-1$$

$$x(n) = \begin{cases} x_1(n) = x(2l) \\ x_2(n) = x(2l+1) \end{cases}$$

$$y(n) = x_1(n) + \mathrm{i}\, x_2(n)$$

$$\longleftrightarrow Y(k) = X_1(k) + \mathrm{i}\, X_2(k)$$

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{N-1} x(2l) W_{2N}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N-1} x(2l+1) W_{2N}^{(2l+1)k}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(2l) W_N^{lk} + \sum_{l=0}^{N-1} x(2l+1) W_N^{lk} \cdot W_{2N}^{k} = X_1(k) + X_2(k) W_N^{k/2}$$

$$X(2N-k) = X^*(k) \quad k = 0 \sim N-1$$

三 FFT的应用

1. 利用FFT进行频谱分析

$$A(k)=|X(k)|=\sqrt{X_r^2(k)+X_i^2(k)}$$

2. 利用FFT计算IDFT

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}\qquad W=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/N}$$

$$x^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W^{nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\{\mathrm{FFT}[X^*(k)]\}^*$$

3. 利用FFT进行快速卷积

$$X_1(k)\cdot X_2(k)\xrightarrow{IDFT}x_1(n)\,Ⓝ\,x_2(n)$$

线性相关 $$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x_1(k)x_2(n-k)$$

循环相关 $$y^c(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}_1(k)\tilde{x}_2(n-k)$$

步骤： 1) 在$x_1(n)$后补N_2-1个 “0”

在$x_2(n)$后补N_1-1个 “0”

2) $x_1(n) \xleftrightarrow{FFT} X_1(k)$

$x_2(n) \xleftrightarrow{FFT} X_2(k)$

3) $X_1(k) \cdot X_2(k) \xrightarrow{IDFT} x_1(n) Ⓝ x_2(n)$

4. 利用FFT进行快速相关

$$\frac{1}{N} X^*(k) \cdot Y(k) \xrightarrow{IDFT} \gamma_{xy}^c(p)$$

步骤： 1) 在$x(n)$后补N_2-1个 “0”

在$y(n)$后补N_1-1个 “0”

2) $x(n) \xleftrightarrow{FFT} X(k)$

$y(n) \xleftrightarrow{FFT} Y(k)$

3) $\frac{1}{N} X^*(k) \cdot Y(k) \xrightarrow{IDFT} \gamma_{xy}^c(p)$

§ 平稳随机过程信号的功率谱及其估计

一 功率谱函数

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,\mathrm{d}t<\infty$$ 功率信号

$$\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau<\infty$$

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$ $x(t)$的功率谱密度函数

$$\gamma_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\gamma_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-\mu_x][x(t+\tau)-\mu_x]\,\mathrm{d}t$$

$$\tau=0\quad \gamma_x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-\mu_x]^2\,\mathrm{d}t\overset{\mu_x=0}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

谱分析基础与快速傅立叶变换

$\because \quad \gamma_x(\tau) = \gamma_x(-\tau)$ 偶函数

$\therefore \quad S_x(\omega) = 2\int_0^{\infty} \gamma_x(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$ 自功率谱密度函数

序列$x(n)$ $\quad S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_x(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$

周期 $\quad S_x(\omega_j) = \Delta t \sum_{k=-m}^{m} \hat{\gamma}_x(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_j}$

$$= \Delta t[\hat{\gamma}_x(0) + 2\sum_{k=1}^{m-1} \hat{\gamma}_x(k)\cos\frac{kj\pi}{m} + (-1)^j \cdot 2\hat{\gamma}_x(m)]$$

二 几个例子

1. 正弦随机信号

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\sin(\omega_0 t + \theta) \cdot A\sin(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{A^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

2. 有限带宽信号

$$S_x(\omega)=\begin{cases} S_0 & \omega_1\le|\omega|\le\omega_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\gamma_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}S_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}S_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{S_0}{\pi\tau}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)$$

$\omega_1=0 \quad \omega_2=\omega_0 \qquad \gamma_x(\tau)=\frac{S_0}{\pi\tau}\sin\omega_0\tau$ sinc函数

$$\tau \to \infty \quad \gamma_x(\tau) \to 0$$

3. 白噪声信号

$$S_x(\omega) = S_0 \quad -\infty \le \omega \le \infty$$

$$\gamma_x(\tau) = \lim_{\omega_0 \to \infty} \frac{S_0}{\pi\tau} \sin \omega_0 \tau$$

$$= S_0 \delta(\tau)$$

三 互功率谱密度函数

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$S_{xy}(-\omega) = S_{yx}(\omega)$$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) \cos\omega\tau \,\mathrm{d}\tau - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) \sin\omega\tau \,\mathrm{d}\tau$$

$$= P_{xy}(\omega) - \mathrm{i}\, Q_{xy}(\omega)$$

共谱　　重谱