

# 第五章 观测数据的平滑与滤波

## § 滤波的一般原理

预处理

消除误差、干扰等

{ 平滑 光滑化处理

{ 滤波 数字通讯、自动控制、图像处理

### 一 滤波的一般原理

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

$$\updownarrow \quad \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow$$

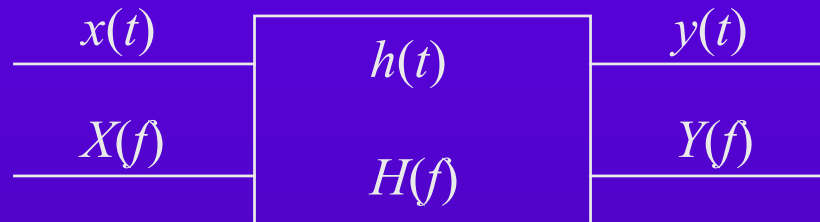
$$X(f) = S(f) + N(f)$$

$$\text{设计函数 } H(f) = \begin{cases} 1 & S(f) \neq 0 \\ 0 & S(f) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) \cdot H(f) \\ &= [S(f) + N(f)] \cdot H(f) \\ &= S(f) \end{aligned}$$

## 观测数据的平滑与滤波

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \\ &= s(t)\end{aligned}$$



卷积滤波

$h(t)$  脉冲响应函数 滤波系数  
 $H(f)$  频率响应函数 传递函数

## 二 理想滤波器

### 1. 理想低通滤波器

$$H_1(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_1 \\ 0 & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

$$h_1(n) = \frac{\sin 2\pi f_1 n \Delta}{\pi n \Delta}$$

## 2. 理想带通滤波器

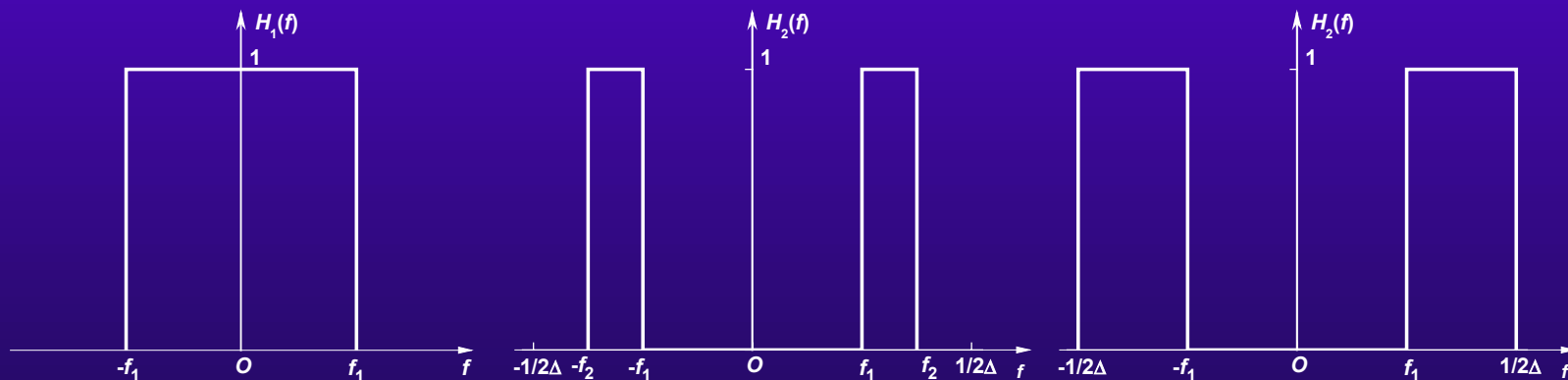
$$H_2(f) = \begin{cases} 1 & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$h_2(n) = \frac{2 \sin[\pi n \Delta (f_2 - f_1)] \cos[\pi n \Delta (f_2 + f_1)]}{\pi n \Delta}$$

## 3. 理想高通滤波器

$$H_3(f) = \begin{cases} 0 & |f| \leq f_1 \\ 1 & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

$$h_3(n) = \frac{1}{\Delta} \delta(n) - \frac{\sin 2\pi f_1 n \Delta}{\pi n \Delta}$$



## § 最小平方滤波

$y(t) = x(t) * h(t)$  输出  $z(t)$  希望输出

$$\{y_k\} = \{x_k\} * \{h_k\} = \sum_{n=0}^{M-1} h_n x_{k-n}$$

输出误差  $\varepsilon_k = y_k - z_k$

误差能量  $Q = \sum_k \varepsilon_k^2 = \sum_k \left( \sum_n h_n x_{k-n} - z_k \right)^2 = \min$

$$\frac{\partial Q}{\partial h_n} = 0 \quad n = 0 \sim M-1 \quad h_n: \text{最小平方滤波因子}$$

最小平方预测滤波

$$y_k = \hat{x}_{k+\tau} = \sum_{n=0}^{M-1} h_n x_{k-n} \quad \tau: \text{预测步长}$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_k (x_{k+\tau} - \hat{x}_{k+\tau})^2 \\ &= \sum_k \left( x_{k+\tau} - \sum_n h_n x_{k-n} \right)^2 = \min \end{aligned}$$

## 观测数据的平滑与滤波

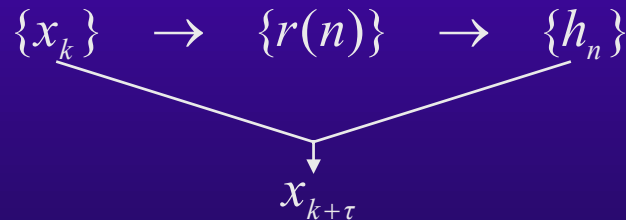
$$\frac{\partial Q}{\partial h_s} = 0$$

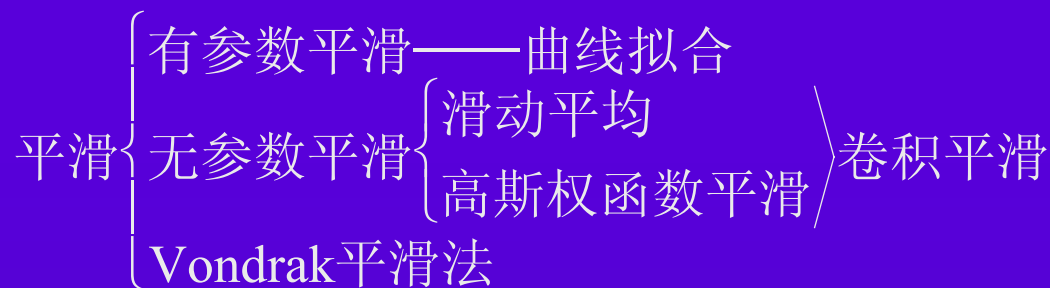
$$-2 \sum_k (x_{k+\tau} - \sum_n h_n x_{k-n}) x_{k-s} = 0$$

$$\sum_n h_n r(n-s) = r(\tau+s)$$

以矩阵的形式表示

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(M-1) & r(M-2) & \cdots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\tau) \\ r(\tau+1) \\ \vdots \\ r(\tau+M-1) \end{pmatrix}$$





## § 最小二乘拟合平滑

### 一 多项式拟合平滑

$$x(t_i) \quad i = 1 \sim N$$

$$p(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 \cdots + a_k t_i^k$$

$$Q = \sum_i [x(t_i) - p(t_i)]^2 = \min$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N (a_0 + \sum_{l=1}^k a_l t_i^l) t_i^j = \sum_{i=1}^N x(t_i) t_i^j$$

## 二 周期拟合平滑

$$p(t_i) = \sum_{j=1}^k A_j \cos(\omega_j t_i + \varphi_j) \quad \omega_j \text{已知}$$

$$p(t_i) = \sum_{j=1}^k (\alpha_j \cos \omega_j t_i + \beta_j \sin \omega_j t_i)$$

线性化

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0$$

## 三 滑动平均（等间隔采样）

### 1. 三点滑动平均

$$x(t_{j-1}) \quad x(t_j) \quad x(t_{j+1})$$

$$p(t_i) = a_0 + a_1 t_i$$

$$Q = \sum_i [x(t_i) - (a_0 + a_1 t_i)]^2 = \min$$

## 观测数据的平滑与滤波

$$\begin{cases} 3a_0 + a_1 \sum_{i=j-1}^{j+1} t_i = \sum_{i=j-1}^{j+1} x(t_i) \\ a_0 \sum_{i=j-1}^{j+1} t_i + a_1 \sum_{i=j-1}^{j+1} t_i^2 = \sum_{i=j-1}^{j+1} x(t_i) t_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=j-1}^{j+1} x(t_i) - \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{t_{j+1} - t_{j-1}} t_j \\ a_1 = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{t_{j+1} - t_{j-1}} \end{cases}$$

$$x'(t_j) = \frac{1}{3} [x(t_{j-1}) + x(t_j) + x(t_{j+1})]$$

$$p(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2$$

$$x'(t_j) = \frac{1}{4} [x(t_{j-1}) + 2x(t_j) + x(t_{j+1})]$$

三点加权滑动平均





## 2. 五点滑动平均

$$x(t_{j-2}) \quad x(t_{j-1}) \quad x(t_j) \quad x(t_{j+1}) \quad x(t_{j+2})$$

$$p(t_i) = a_0 + a_1 t_i$$

$$x'(t_j) = \frac{1}{5} [x(t_{j-2}) + x(t_{j-1}) + x(t_j) + x(t_{j+1}) + x(t_{j+2})]$$

$$p(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2$$

$$x'(t_j) = \frac{1}{35} [-3x(t_{j-2}) + 12x(t_{j-1}) + 17x(t_j) + 12x(t_{j+1}) - 3x(t_{j+2})]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{简单平均} \quad x'(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n x(t-k) \\ \text{加权平均} \quad x'(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k x(t-k) \end{array} \right.$$



## 观测数据的平滑与滤波

例：某信号 $x(t) = u(t) + v(t)$ ，其中 $u(t) = \sin 2\pi t$ ， $v(t) = \sin \frac{2\pi t}{8}$ ，采样间隔 $\Delta t = 0.2s$ ，试用五点滑动平均滤去 $u(t)$ 。

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{5}(x_{k-2} + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2}) \\ &= \frac{1}{5}(u_{k-2} + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + u_{k+2}) + \frac{1}{5}(v_{k-2} + v_{k-1} + v_k + v_{k+1} + v_{k+2}) \\ &\approx v_k \end{aligned}$$

## § 高斯权函数平滑

$$x'(t, a) = \sum_{i=1}^N u(t - t_i, a) x(t_i) \quad \text{权函数平滑}$$

$$x'(t_j) = \frac{1}{W_j} \sum_{i=1}^N p_j \cdot x(t_i) \exp[-(t_j - t_i)^2 / 2a^2]$$

$$\text{其中 } W_j = \sum_{i=1}^N p_j \cdot \exp[-(t_j - t_i)^2 / 2a^2]$$

## 观测数据的平滑与滤波

- 特点:
1. 不丢失平滑点;
  2. 不要求等间隔;
  3. 能得到任意时刻的平滑内插值。

频率响应函数  $H(f) = \exp(-2\pi^2 f^2 a^2)$

{ 压制带  
通过带  
过渡带

低通  $f_c$   $H(f_c, a) = 1 \rightarrow a$

高通  $f_c$   $H(f_c, a) \approx 0 \rightarrow a$

带通  $f_1, f_2 \rightarrow x'(t_i, a_1) \quad x'(t_i, a_2)$   
 $x'(t_i, a_2) - x'(t_i, a_1)$

## § Vondrak平滑法

拟合函数已知  $\longrightarrow$  曲线拟合、滑动平均

拟合函数未知  $\longrightarrow$  如何平滑?

Vondrak平滑 (最优平滑法)

### 一 Vondrak平滑法的基本原理

$$x_i \quad i=1 \sim N$$

$$Q = F + \lambda^2 S = \min$$

$$\text{其中 } F = \sum_i p_i (x'_i - x_i)^2$$

拟合度

$$S = \sum_{i=1}^{N-3} (\Delta^3 x'_i)^2$$

平滑度

$$\Delta^k x_i = \Delta^{k-1} x_{i+1} - \Delta^{k-1} x_i$$

$$\text{如 } \Delta x_1 = x_2 - x_1$$

$$\Delta^3 x_1 = \Delta^2 x_2 - \Delta^2 x_1 = x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1$$

$$0 < \lambda^2 < \infty$$

$$\lambda^2 \rightarrow 0 \quad F \rightarrow 0$$

$$\lambda^2 \rightarrow \infty \quad S \rightarrow \infty$$

逼近观测值的曲线

二次多项式、抛物线

## 二 平滑公式的推导

$$Q = \sum_{i=1}^N p_i (x'_i - x_i)^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{N-3} (\Delta^3 x'_i)^2 = \min$$

$(t_i, x'_i)$  处于光滑曲线  $f(t)$  上,  $S = \int [f'''(t)]^2 dt$

以三次拉格朗日多项式  $L_i(t)$  来逼近  $f(t)$

$$L_i(t) = \frac{(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})(t_i-t_{i+3})} x'_i + \frac{(t-t_i)(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i+2})(t_{i+1}-t_{i+3})} x'_{i+1} \\ + \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+3})}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+3})} x'_{i+2} + \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_{i+3}-t_i)(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})} x'_{i+3}$$

## 观测数据的平滑与滤波

$$L_i'''(t) = \frac{6}{(t_i - t_{i+1})(t_i - t_{i+2})(t_i - t_{i+3})} x'_i + \frac{6}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i+2})(t_{i+1} - t_{i+3})} x'_{i+1}$$
$$+ \frac{6}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})(t_{i+2} - t_{i+3})} x'_{i+2} + \frac{6}{(t_{i+3} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+2})} x'_{i+3}$$

$$S = \int_{t_2}^{t_{N-1}} [L_i'''(t)]^2 dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N-3} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} [L_i'''(t)]^2 dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N-3} [L_i'''(t)]^2 (t_{i+2} - t_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{N-3} (a_i x'_i + b_i x'_{i+1} + c_i x'_{i+2} + d_i x'_{i+3})^2$$

$$Q = \sum_{i=1}^N p_i (x'_i - x_i)^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{N-3} (a_i x'_i + b_i x'_{i+1} + c_i x'_{i+2} + d_i x'_{i+3})^2$$

$$= \min \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x'_i} = 0$$



## 观测数据的平滑与滤波

$$\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 2p_i(x'_i - x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x'_i} = 2a_i(a_i x'_i + b_i x'_{i+1} + c_i x'_{i+2} + d_i x'_{i+3})$$

$$+ 2b_{i-1}(a_{i-1} x'_{i-1} + b_{i-1} x'_i + c_{i-1} x'_{i+1} + d_{i-1} x'_{i+2})$$

$$+ 2c_{i-2}(a_{i-2} x'_{i-2} + b_{i-2} x'_{i-1} + c_{i-2} x'_i + d_{i-2} x'_{i+1})$$

$$+ 2d_{i-3}(a_{i-3} x'_{i-3} + b_{i-3} x'_{i-2} + c_{i-3} x'_{i-1} + d_{i-3} x'_i)$$



$$\begin{aligned} & a_{i-3}d_{i-3}x'_{i-3} + (a_{i-2}c_{i-2} + b_{i-3}d_{i-3})x'_{i-2} + (a_{i-1}b_{i-1} + b_{i-2}c_{i-2} + c_{i-3}d_{i-3})x'_{i-1} \\ & + (a_i^2 + b_{i-1}^2 + c_{i-2}^2 + d_{i-3}^2 + p_i/\lambda^2)x'_i + (a_i b_i + b_{i-1}c_{i-1} + c_{i-2}d_{i-2})x'_{i+1} \\ & + (a_i c_i + b_{i-1}d_{i-1})x'_{i+2} + a_i d_i x'_{i+3} = p_i x_i / \lambda^2 \quad \varepsilon = 1/\lambda^2 \quad \text{平滑因子} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=-3}^3 A_{i,j} x'_{i+j} = B_i x_i$$

方程组的系数矩阵为一七对角线矩阵





## 观测数据的平滑与滤波

$$\begin{cases} p_i = -\{[(a_i p_{i-3} + b_i)p_{i-2} + (a_i q_{i-3} + c_i)]q_{i-1} + (a_i p_{i-3} + b_i)w_{i-2} + e_i\} / t_i \\ q_i = -\{[(a_i p_{i-3} + b_i)p_{i-2} + (a_i q_{i-3} + c_i)]w_{i-1} + f_i\} / t_i \\ w_i = -g_i / t_i \\ z_i = \{h_i - a_i z_{i-3} - (a_i p_{i-3} + b_i)z_{i-2} - [(a_i p_{i-3} + b_i)p_{i-2} + (a_i q_{i-3} + c_i)]z_{i-1}\} / t_i \end{cases}$$

$$p_0 = p_{-1} = p_{-2} = 0$$

$$q_0 = q_{-1} = q_{-2} = 0$$

$$w_0 = w_{-1} = w_{-2} = 0$$

$$z_0 = z_{-1} = z_{-2} = 0$$

缺点: 1. 当  $|A_{ij}|$  较小时, 方程求解不稳定;

2. 当  $\varepsilon$  较小时, 观测数据失效。

$$B_i = \varepsilon p_i$$

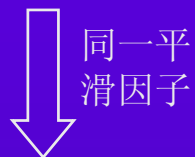
改进: 二次抛物线拟合  $\hat{x}_i$

$$x'_i = \hat{x}_i + \delta_i$$

$$\sum_{i=-3}^3 A_{i,j} x'_{i+j} = B_i x_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=-3}^3 A_{i,j} \delta_{i+j} = B_i (x_i - \hat{x}_i)$$

## 四 Vondrak平滑法原理的改进

观测资料非等间隔，数据长度不同



不同的平滑度



相同的平滑度

改进  $Q = (N-3)^{-1} F + (t_{N-1} - t_2)^{-1} \lambda^2 S$



$$a_i, b_i, c_i, d_i \times (t_{N-1} - t_2)^{-1/2}$$

$$\varepsilon \times (N-3)^{-1}$$

时间量纲变化 $k$ 倍，平滑因子变为  $\varepsilon k^{-6}$

## 五 Vondrak平滑法的应用

### 单边频率滤波器

频率响应函数 
$$F = \frac{\sum_{i=1}^N x_i x'_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

解析表达式 
$$F = [1 + \varepsilon^{-1} (2\pi f)^6]^{-1}$$

低通滤波  $f_c$   $F \rightarrow \varepsilon$

高通滤波  $f_c$   $F \rightarrow \varepsilon$

带通滤波  $f_1, f_2$   $F \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$x'_i(\varepsilon_2) - x'_i(\varepsilon_1)$$

## 六 平滑因子的选取

### 1. 频率响应法

计算不同平滑因子的频率响应曲线，选取恰当的 $\varepsilon$

### 2. 观测误差法

不同平滑因子进行平滑，计算 $\sigma(\varepsilon)$ ，选取 $\sigma(\varepsilon) = \sigma_m$

$$\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (x'_i - x_i)^2}{N-3}}$$

### 3. 平滑误差法

不同平滑因子进行平滑，计算 $\sigma(\varepsilon)$ ，作 $\varepsilon \sim \sigma(\varepsilon)$ 图，选取 $\sigma(\varepsilon)$ 变化缓慢的 $\varepsilon$

### 4. 交叉证认法

