第六章 随机信号的功率谱估计

$$S(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$

$\hat{r}(k)$　$r(k)$的有限近似

$$\hat{S}(\omega)=\sum_{k=-m}^{m} \hat{r}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$　功率谱估计

功率谱估计
- 非参数谱估计（经典谱估计）
  - 相关功率谱
  - 周期图
- 参数谱估计
  - 最大熵谱估计　自回归谱估计
  - 滑动平均谱估计
  - 自回归滑动平均谱估计
  - 极大似然谱估计

§ 相关功率谱估计 Blackman——Tukey

一 相关功率谱估计式

1. 自相关功率谱

$$\hat{r}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|k|-1}x(n)x(n+k)$$

$$\hat{S}_{BT}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})=\sum_{k=-m}^{m}\hat{r}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$ 间接法

$$=\sum_{k=-m}^{m}\hat{r}(k)\cos k\omega=\hat{r}(0)+2\sum_{k=0}^{m}\hat{r}(k)\cos k\omega$$

2. 互相关功率谱

$$\hat{S}_{xy}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})=P_{xy}(\omega)-\mathrm{i}Q_{xy}(\omega)$$

$$\begin{cases}P_{xy}(\omega)=\sum_{k=0}^{m}[\hat{r}_{xy}(k)+\hat{r}_{yx}(k)]\cos k\omega\\ Q_{xy}(\omega)=\sum_{k=0}^{m}[\hat{r}_{xy}(k)-\hat{r}_{yx}(k)]\sin k\omega\end{cases}$$

二 统计性质

$$E[\hat{r}(k)]=\frac{N-|k|}{N}\cdot r(k)$$

渐进无偏估计

$$=r(k)\cdot w(k)$$

$$w(k)=\begin{cases}1-\dfrac{|k|}{N} & |k|\le N-1\\ 0 & |k|>N\end{cases}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\infty}w_0(n)w_0(n+k)$$

$$x(n)\xrightarrow{\text{矩形窗}}x_N(n)$$

$$r(k)\xrightarrow[\text{三角窗}]{}\hat{r}(k)$$

$$\operatorname{var}[\hat{r}(k)]=\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1-|k|}\sum_{m=0}^{N-1-|k|}[r^2(n-m)+r(n-m-k)\cdot r(m-n-k)]$$

$\hat{r}(k)$是$r(k)$的一致估计

1. 偏差 $B = E[\hat{S}_{BT}(\omega)] - S(\omega)$ 渐进无偏估计

$$E[\hat{S}_{BT}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * W_{\Delta}(\omega)$$

$$W_{\Delta}(\omega) = \frac{1}{N}\left[\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 \xrightarrow{N\to\infty} \delta\text{函数}$$

2. 方差 $\operatorname{var}[\hat{S}_{BT}(\omega)] = \sigma^4\left[\frac{\sin^2(N\omega)}{N^2\sin^2\omega} + 1\right]$

$$\propto [S(\omega)]^2$$

三 平滑窗

1. 作用和用法

$$\tilde{S}(\omega) = \int \hat{S}(\lambda) W(\omega - \lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

抑制$\hat{S}(\omega)$的边瓣幅值

其中 $W(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ 减少泄漏

衡量窗函数的指标：

1) 3dB带宽B；
2) 最大边瓣幅值A(dB)；
3) 边瓣谱峰衰减速度D (dB/oct)。

2. 几种常用的平滑窗

1) 矩形窗

时窗 $w(n)=1$

频窗 $W(\omega)=\dfrac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$

2) 三角窗

时窗 $$w(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{N/2} & n=0\sim N/2\\ w(N-n) & n=N/2\sim N-1\end{cases}$$

频窗 $$W(\omega)=\frac{2}{N}\left[\frac{\sin(N\omega/4)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 e^{-\mathrm{i}\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

3) 汉宁(hanning)窗

时窗 $$w(n)=\sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)$$

频窗 $$W(\omega)=0.5W_0(\omega)+0.25\left[W_0\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_0\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

其中 $$W_0(\omega)=\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}$$

4) 哈明(hamming)窗

时窗 $$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\qquad n=0\sim N-1$$

$$w(n)=0.54+0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\qquad n=-\frac{N}{2}\sim\frac{N}{2}$$

频窗 $$W(\omega)=0.54W_0(\omega)+0.23\left[W_0\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_0\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

5) 布莱克曼(Blackman)窗

时窗 $$w(n)=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+0.08\cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right)$$

频窗 $$W(\omega)=0.42W_0(\omega)-0.25\left[W_0\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_0\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$
$$+0.04\left[W_0\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+W_0\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

6) 余弦半钟型窗

时窗 $$w(n)=\begin{cases}0 & n<-N/2\\ \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{10\pi}{N}n\right) & -N/2\le n\le -\frac{4N}{10}\\ 1 & -\frac{4N}{10}\le n\le \frac{4N}{10}\\ \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{10\pi}{N}n\right) & \frac{4N}{10}\le n\le N/2\\ 0 & n>N/2\end{cases}$$

四 加窗相关功率谱估计

频域 功率谱估计$*$平滑窗谱函数

时域 自协方差序列·平滑窗时间函数 $\xrightarrow{\text{IDFT}}$

步骤：

1) 计算自协方差估计；
2) 计算自功率谱估计；
3) 计算加窗平滑谱估计。

§ 周期图 (periodgram)

一 周期图估计式

$$\hat{S}_{\text{per}}(j)=\frac{1}{N}\left|X_N(j)\right|^2$$

$$E[\hat{S}_{\text{per}}(\omega)]=\sum_{k=-N+1}^{N-1}\left(\frac{N-|k|}{N}\right)r(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$

$$\operatorname{var}[\hat{S}_{\text{per}}(\omega)]=\sigma^4\left[\frac{\sin^2(N\omega)}{N^2\sin^2\omega}+1\right]$$

非一致估计

二 周期图的改进

平均　平滑　加权交叠平均　四步结合算法

1. 平均周期图

$$x^m(n)=x(n+mM-M)$$

$$\hat{S}_M^m(\omega) = \frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x^m(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\right|^2$$

$$\bar{S}_{\mathrm{per}}(\omega) = \frac{1}{ML}\sum_{m=1}^{L}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x^m(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\right|^2$$

$$\mathrm{var}[\bar{S}_{\mathrm{per}}(\omega)] = \frac{\sigma^4}{L}\left[\frac{\sin^2(N\omega/L)}{\sin^2\omega\cdot N^2/L^2}+1\right]$$

方差的改善$\longleftarrow$分辨率的下降

2. 平滑周期图

$$\tilde{S}_{\mathrm{per}}(\omega_j) = \frac{1}{2L+1}\sum_{m=j-L}^{j+L} S_{\mathrm{per}}(\omega_m)$$

方差的改善$\longleftarrow$偏差的增大

3. 加权交叠平均法(Welch法)

$$L = \frac{N-M/2}{M/2} \quad 重叠一半$$

$$\hat{S}_{\mathrm{per}}^{m}(\omega)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^{m}(n)d(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\right|^{2}$$

其中 $U=\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1}d^{2}(n)$

$$\tilde{S}_{\mathrm{per}}(\omega)=\frac{1}{MUL}\sum_{m=1}^{L}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^{m}(n)d(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\right|^{2}$$

$$E[\hat{S}_{\mathrm{per}}(\omega)]=S(\omega)*W(\omega)$$

渐进无偏估计

其中 $W(\omega)=\dfrac{1}{MU}\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1}d(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\right|^{2}$

三 经典谱估计小结

1. 有泄漏效应　　旁瓣的假峰掩盖真谱中的弱峰
2. 方差性能不好
3. 改善方差——→分辨率下降/偏差增大

§ 功率谱估计的参数模型法

一 时间序列信号模型

1. 模型

自回归滑动平均模型 ARMA

$$x(n)-a_1x(n-1)-\cdots-a_px(n-p)$$
$$=w(n)-b_1w(n-1)-\cdots-b_qw(n-q)$$

p阶自回归模型 AR(p)

$$x(n)-a_1x(n-1)-\cdots-a_px(n-p)=w(n)$$

q阶滑动平均模型 MA(q)

$$x(n)=w(n)-b_1w(n-1)-\cdots-b_qw(n-q)$$

2. 功率谱

$$S_{\mathrm{ARMA}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})] = \sigma_{\omega}^{2}\left|\frac{1-\sum_{l=1}^{q} b_l \,\mathrm{e}^{-l\omega}}{1-\sum_{k=1}^{p} a_k \,\mathrm{e}^{-k\omega}}\right|^2$$

$$S_{\mathrm{AR}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \sigma_{\omega}^{2}\left|1\Big/\left(1-\sum_{k=1}^{p} a_k \,\mathrm{e}^{-k\omega}\right)\right|^2$$

$$S_{\mathrm{MA}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \sigma_{\omega}^{2}\left|1-\sum_{l=1}^{q} b_l \,\mathrm{e}^{-l\omega}\right|^2$$

二 线性预测和AR模型

线性预测 $E[\varepsilon^2(n)] = \min \quad \rightarrow \quad r(m) = -\sum_{k=1}^{p} h_k r(m-k)$

$$E[\varepsilon^2(n)] = r(0) + \sum_{k=1}^{p} h_k r(k)$$

AR模型　　　　Yule－Walker方程

$$x(n)=\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+w(n)\xrightarrow{\times x(n-m)，求期望} r(m)=\sum_{k=1}^{p}a_k r(m-k)$$

$$\sigma_\omega^2=E[w^2(n)]=r(0)-\sum_{j=1}^{p}a_j r(j)$$

$$\text{AR模型}\xleftrightarrow[E_p=\sigma_\omega^2]{h_k=-a_k}\text{线性预测}$$

三　AR模型参数的Levinson－Durbin递推法

$$\{-a_{11},\sigma_1^2\}\rightarrow\{-a_{21},-a_{22},\sigma_2^2\}\rightarrow\cdots$$

$$\rightarrow\{-a_{p1},-a_{p2},\cdots,-a_{pp},\sigma_p^2\}$$

递推公式

$$a_{kk}=\left[r(k)+\sum_{l=1}^{k-1}a_{k-1,l}\,r(k-l)\right]\Big/\sigma_{k-1}^2$$

$$a_{ki}=a_{k-1,i}+a_{kk}a_{k-1,k-1}$$

$$\sigma_k^2=(1-|a_{kk}|^2)\sigma_{k-1}^2,\quad \sigma_0^2=r(0)$$

§ 最大熵谱分析

一 自协方差函数的最大熵外推

$$
\boldsymbol{R}(N-1)=\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N-1) & r(N-2) & \cdots & r(0) \end{pmatrix}
$$

$$
\det[\boldsymbol{R}(N)]=\begin{vmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(N-1) & r(N) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(N-2) & r(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r(N-1) & r(N-2) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(N) & r(N-1) & \cdots & r(1) & r(0) \end{vmatrix}
$$

$$
=r^2(0)\det[\boldsymbol{R}(N-2)]-r^2(N)\det[\boldsymbol{R}(N-2)]
$$

随机信号的功率谱估计

$$\frac{\mathrm{d}\{\det[\boldsymbol{R}(N)]\}}{\mathrm{d}\,r(N)} = -2r(N)\det[\boldsymbol{R}(N-2)]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\{\det[\boldsymbol{R}(N)]\}}{\mathrm{d}\,r(N)^2} = -2\det[\boldsymbol{R}(N-2)]$$

令 $$\frac{\mathrm{d}\{\det[\boldsymbol{R}(N)]\}}{\mathrm{d}\,r(N)} = 0$$

即 $$\begin{vmatrix} r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(N-2) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N) & r(N-1) & r(N-2) & \cdots & r(1) \end{vmatrix} = 0$$

$$r(N)$$

二 最大熵外推的本质

$$x(n)=a_1x(n-1)+\cdots+a_Nx(n-N)+w(n)$$

$$r(k)=a_1r(k-1)+\cdots+a_Nr(k-N)$$

由Yule－Walker方程 $r(m)=\sum_{k=1}^{N}a_kr(m-k) \quad m=1\sim N$

解出a_k，代入上式

$$\begin{vmatrix} r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(N-2) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N) & r(N-1) & r(N-2) & \cdots & r(1) \end{vmatrix}=0$$

最大熵外推 $\Longleftrightarrow$ 自回归分析法

三　伯格(Burg)递推算法

前向预测误差　$e_k^f(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{i=1}^{k} a_{ki} x(n-i)$

后向预测误差　$e_k^b(n) = x(n-k) - \hat{x}(n-k)$

$$= x(n-k) + \sum_{i=1}^{k} a_{ki} x(n-k+i)$$

平均预测误差功率　$E_k = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}\left(\left|e_k^f(n)\right|^2 + \left|e_k^b(n)\right|^2\right)\right]$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_{kk}} = 0$$

$$e_k^f(n) = e_{k-1}^f(n) + a_{kk} e_k^b(n-1)$$

$$e_k^b(n) = e_{k-1}^b(n) + a_{kk} e_k^f(n-1)$$

$$a_{kk} = \frac{-2\sum_{n=k}^{N-1} e_{k-1}^f(n) e_{k-1}^b(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1}\left(\left|e_{k-1}^f(n)\right|^2 + \left|e_{k-1}^b(n-1)\right|^2\right)}$$

步骤：

1) 计算零延迟自协方差估计$r(0)$；

2) 计算预测误差起始值e^f和e^b；

3) 计算反射系数a_{11}；

4) 增加阶数，重复2)和3)至p阶。

缺陷：谱峰漂移；谱线分裂

四 马波(Marple)递推算法

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_{ki}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{k} a_{kj} r_k(i,j) = 0$$

$$r_k(i,j) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} [x(n-j)x(n-i) + x(n-k+j)x(n-k+i)]$$

$$\begin{pmatrix} r_p(0,0) & r_p(0,1) & \cdots & r_p(0,p) \\ r_p(1,0) & r_p(1,1) & \cdots & r_p(1,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_p(p,0) & r_p(p,1) & \cdots & r_p(p,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_{p1} \\ \vdots \\ a_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_p = (\boldsymbol{T}_p)^H \boldsymbol{T}_p + (\boldsymbol{T}_p^v)^H \boldsymbol{T}_p^v$$

运算量 p^3量级 $\rightarrow$ p^2量级

五 AR模型阶次的选取

1. 最终预测误差(FPE)准则
2. 信息论(AIC)准则